KLASICKÁ TEORIE POLE

(skalární pole)

Prostor historií

$P = \mathcal{F}M$ prostor historií = polních konfigurací

$\phi^x = \phi(x)$

$P^* = \tilde{\mathcal{F}}M$ duální prostor hustot

$J_x = J(x)$ typicky $J(x) = j(x)\, g^{\frac{1}{2}}(x)$

dualita

$$\int J(x)\,\phi(x) = J_x\,\phi^x = J\bullet\phi$$

budeme pracovat s distribucemi a volit duální prostory tak, aby bylo "integrování" definované

chceme pracovat s funkcemi neklesajícími v časovém směru → budeme muset explicitně zajistit oříznutí v tomto směru

Polní pozorovatelná

$\Phi^x(\phi) = \phi(x)$

$(\mathrm{d}\Phi^x)_y = \frac{\delta}{\delta\phi^y}\Phi^x = \delta^x_y$

Pohybové rovnice

variace akce

$\phi \to \phi + \varepsilon\,\delta\phi$ změna akce v řádu ε

$$\delta S[\Omega](\phi) = \frac{d}{d\varepsilon} S[\Omega](\phi + \varepsilon\delta\phi)\Big|_{\varepsilon=0}$$

$$= -\int_\Omega \left((d_a\phi)\, g^{\frac{1}{2}} g^{ab} (d_b \delta\phi) + V\phi\,\delta\phi \right) + \int_\Omega J\,\delta\phi$$

$$= -\int_\Omega d_b\left(g^{\frac{1}{2}} g^{ab} d_a \phi\right) - \int_\Omega \delta\phi\left(-d_b\left(g^{\frac{1}{2}} g^{ab} d_a\phi\right) + V g^{\frac{1}{2}}\phi\right) + \int_\Omega J\,\delta\phi$$

$$= -\int_{\partial\Omega} \delta\phi\, g^{\frac{1}{2}}\, n^a d_a\phi - \int_\Omega \delta\phi\, g^{\frac{1}{2}}\left[-\Box + V\right]\phi + \int_\Omega J\,\delta\phi$$

$$= -\,\delta\phi \cdot d\widetilde{\vec{F}}[\partial\Omega]\cdot\phi - \delta\phi \cdot \chi[\Omega]\,\widetilde{\vec{F}}\cdot\phi + \delta\phi\cdot(\chi[\Omega]\,J)$$

nosič na $\partial\Omega$

$$\psi \cdot d\widetilde{\vec{F}}[\partial\Omega]\cdot\phi = \int_{\partial\Omega} \psi\, g^{\frac{1}{2}}\, n^a d_a \phi$$

$$\widetilde{\vec{F}}\cdot\phi = g^{\frac{1}{2}}\left[-\Box + V\right]\phi$$

gradient na P

$$\delta S[\Omega](\phi) = \delta\phi \cdot \mathrm{d}\!\!\mathrm{l}\, S[\Omega](\phi)$$

$$\mathrm{d}\!\!\mathrm{l} S[\Omega](\phi) = -\,d\widetilde{\vec{F}}[\partial\Omega]\cdot\phi - \chi[\Omega]\,\widetilde{\vec{F}}\cdot\phi + \chi[\Omega]\,J$$

$$= -\Pi[\partial\Omega](\phi) + \chi[\Omega]\,\delta S(\phi)$$

$$\Pi[\partial\Omega](\phi) = d\widetilde{\vec{F}}[\partial\Omega]\cdot\phi$$

nosič na $\partial\Omega$
závisí na norm. der ϕ na $\partial\Omega$
nezávisí na norm. der ve var. arg
ultralok. ve var. arg.

$$\delta S(\phi) = -\widetilde{\vec{F}}\cdot\phi + J$$

pohybové rovnice

$\forall\Omega \quad \forall\delta\phi \quad \delta\phi|_{\partial\Omega} = 0 \qquad \delta S[\Omega](\bar\phi) = 0$

$$\delta\phi\cdot\Pi[\partial\Omega](\bar\phi) = 0 \qquad \text{díky } \delta\phi|_{\partial\Omega} = 0$$

$\Downarrow$

$$\delta S(\bar\phi) = 0$$

Klein-Gordonova rov.

$$\widetilde{\vec{F}}\cdot\phi = J$$

$$\left[-\Box + V\right]\phi = J\,g^{-\frac{1}{2}} \qquad \Box = \nabla^n\nabla_n$$

Akce na oblasti

$S[\Omega] : P \to \mathbb{R}$

volné pole se zdroji J:

$$S[\Omega](\phi) = -\frac{1}{2}\int_\Omega \left(d_a\phi\, g^{ab}\, d_b\phi + V\phi^2 \right) g^{\frac{1}{2}} + \int_\Omega J\phi$$

omezení na Ω → konečnost

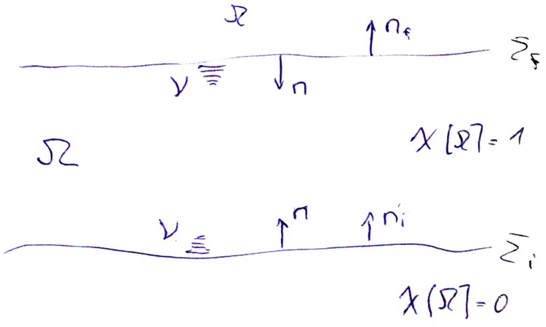
typicky $\Omega = \langle \Sigma_f | \Sigma_i \rangle$

$\partial\Omega = \Sigma_i - \Sigma_f$

ν vnitřní normála 1-forma

n — " — vektor

$n^a = -g^{ab}\nu_b$



P lineární prostor

$S[\Omega]$ kvadratická pozorovatelná

$$S[\Omega](\phi) = -\frac{1}{2}\phi\cdot F[\Omega]\cdot\phi + J\cdot\phi$$

$F[\Omega]_{xy}$ symetrická bidistribuce - viz dodatek

J_x zdroj - hustota

Klein-Gordonova forma

snaha vybudovat fáz. prostor – potřeba sympl. str.

oblast Ω $\longrightarrow$ 2-forma na P (funkc. 2-forma)

$$\partial\mathcal{F}[\Omega] = \mathrm{d}\,\Pi[\partial\Omega] - \mathrm{d}(X[\Omega]\,\delta S)$$

$$\uparrow\quad 0 = \mathrm{d}\,\mathrm{d}\,S[\Omega] = -\mathrm{d}\,\Pi[\partial\Omega] + \mathrm{d}(X[\Omega]\,\delta S)$$

pro skalární pole

$$\mathrm{d}(X[\Omega]\delta S)_{xy} = \frac{\delta}{\delta\phi^x} X[\Omega]\delta S_y - \frac{\delta}{\delta\phi^y} X[\Omega]\delta S_x = -(X[\Omega]\overleftrightarrow{F})_{yx} + (X[\Omega]\overleftrightarrow{F})_{xy}$$

$$= (X[\Omega]\overrightarrow{F} - \overleftarrow{F}X[\Omega])_{xy} \overset{\text{def}}{=} \partial\mathcal{F}[\partial\Omega]_{xy}$$

$$\mathrm{d}\,\Pi[\partial\Omega]_{xy} = \frac{\delta}{\delta\phi^x}\Pi[\partial\Omega]_y - \frac{\delta}{\delta\phi^y}\Pi[\partial\Omega]_x = \mathrm{d}\overleftrightarrow{F}[\partial\Omega]_{yx} - \mathrm{d}\overleftrightarrow{F}[\partial\Omega]_{xy}$$

$$\Rightarrow\quad \partial\mathcal{F}[\partial\Omega] = X[\Omega]\overrightarrow{F} - \overleftarrow{F}X[\Omega] = \mathrm{d}\overleftarrow{F}[\partial\Omega] - \mathrm{d}\overrightarrow{F}[\partial\Omega]$$

- pro volné pole již nezávisí na ϕ
- nezmění se ani při nelinearitě skrz nelin. interakci $\mathcal{V}(\phi)$

integr. vyjádření

$$\phi\cdot\partial\mathcal{F}[\partial\Omega]\cdot\psi = \int_\Omega \big(\phi([-\Box+V]\psi) - \psi[-\Box+V]\phi\big)\, g^{\frac{1}{2}}$$

$$= \int_{\partial\Omega} \big((n^a d_a\phi)\psi - \phi(n^a d_a\psi)\big)\, g^{\frac{1}{2}}$$

zúžení na nadplochu

$\partial\mathcal{F}[\Sigma]$ pouze $\partial\Omega$ nahrazeno Σ

$$\phi\cdot\partial\mathcal{F}[\Sigma]\cdot\psi = \int_\Sigma \big((n^a d_a\phi)\psi - \phi(n^a d_a\psi)\big)\, g^{\frac{1}{2}}$$

$$\partial\mathcal{F}[\partial\langle\Sigma_f|\Sigma_i\rangle] = -\partial\mathcal{F}[\Sigma_f] + \partial\mathcal{F}[\Sigma_i]$$

Kovariantní fázový prostor

prostor řešení pohyb. rov. $\mathcal{S}_{all}$

se zdrojem $\overrightarrow{\mathcal{F}}\cdot\phi = J$ $\mathcal{S}_J$

bez zdroje $\overrightarrow{\mathcal{F}}\cdot\phi = 0$ $\mathcal{S}_0 \equiv \mathcal{S}$

obecně $\mathcal{S}_{all}$ není lineární - např. $\mathcal{S}_J$

$\mathcal{S}_J$ affiní prostor se zaměřením $\mathcal{S}_0$

$\mathcal{S} \subset \mathcal{P}$ lze ztotožnit s tečným prostorem k $\mathcal{S}_J$

symplektická struktura

na $\mathcal{S}$ je $\partial\mathcal{F}[\partial\Omega]$ triviální

$\phi\cdot\partial\mathcal{F}[\partial\Omega]\cdot\psi = \phi\cdot(\chi[\Omega]\overrightarrow{\mathcal{F}} - \overleftarrow{\mathcal{F}}\chi[\Omega])\cdot\psi = 0$

umožní definovat sympl. str.

$\partial\mathcal{F} = \partial\mathcal{F}[\Sigma]$ Σ Cauchyho nadplocha

nezávislost na Σ:

$\Omega = \langle\Sigma_f, \Sigma_i\rangle$

platí $\partial\mathcal{F}[\partial\Omega] = \partial\mathcal{F}[\Sigma_i] - \partial\mathcal{F}[\Sigma_f]$ na $\mathcal{S}$ triviální $\Rightarrow$

$\phi\cdot\partial\mathcal{F}[\Sigma_i]\cdot\psi = \phi\cdot\partial\mathcal{F}[\Sigma_f]\cdot\psi$

platí

$\mathbf{d}\,\partial\mathcal{F} = \mathbf{d}\,\partial\mathcal{F}[\Sigma] = \mathbf{d}\,\mathbf{d}\,\Pi[\Sigma] = 0$

$\partial\mathcal{F}$ nedegenerovaná na $\mathcal{S}$ ($\Leftarrow$ citlivá na všechna poč. data)

Kauzální Gr. fce

G_c $G_c^{xy} = G_c(x,y)$ inverze k $\partial\mathcal{F}$ na $\mathcal{S}$

$G_c \in \mathcal{S}\otimes\mathcal{S} \subset \mathcal{P}\otimes\mathcal{P}$

$\overrightarrow{\mathcal{F}}\cdot G_c = 0$ $G_c\cdot\overleftarrow{\mathcal{F}} = 0$ $G_c = -G_c^T$

v $\mathcal{S}$ $G_c\cdot\partial\mathcal{F} = -\delta_{\mathcal{S}}$

v $\mathcal{P}$ $G_c\cdot\partial\mathcal{F}[\Sigma] = -D_c[\Sigma]$

$D_c[\Sigma]$ projektor $\mathcal{P}\to\mathcal{S}$ zachovávající data na Σ

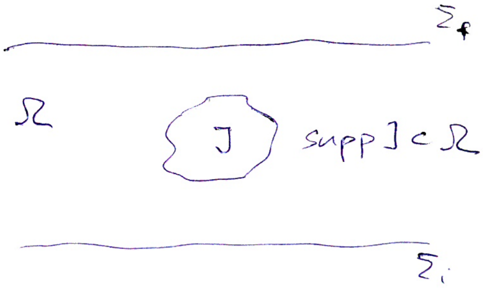
$$D_c[\Sigma] = -G_c\cdot\partial\mathcal{F}[\Sigma] = -\underbrace{G_c\cdot\overleftarrow{\mathbf{d}\mathcal{F}}[\Sigma]}_{\text{citlivé na hodnotu } \phi \text{ na } \Sigma} + \underbrace{G_c\cdot\overrightarrow{\mathbf{d}\mathcal{F}}[\Sigma]}_{\text{citlivé na norm. der. } \phi \text{ na } \Sigma}$$

Poisson. závorky

$\{A, B\} = \mathbf{d}A\cdot G_c\cdot\mathbf{d}B$ $\{\Phi^x, \Phi^y\} = G_c^{xy}$

1.11.06

Klasické Greenovy funkce



advanc. řešení

$$\overleftarrow{\mathcal{F}} \cdot \bar\Phi_{adv}[J] = J \qquad D_c[\Sigma_f]\cdot \bar\Phi_{adv}[J]=0$$

retard. řešení

$$\overleftarrow{\mathcal{F}}\cdot \bar\Phi_{ret}[J]=J \qquad D_c[\Sigma_i]\cdot\bar\Phi_{ret}[J]=0$$

symetrické řešení

$$\bar\Phi_{sym}[J] = \frac{1}{2}\left(\bar\Phi_{ret}[J]+\bar\Phi_{adv}[J]\right)$$

Greenovy fce

$$\bar\Phi_{adv}[J]=G_{adv}\cdot J \qquad \overleftrightarrow{\mathcal{F}}\cdot G_{adv}=\delta$$

$$\bar\Phi_{ret}[J]=G_{ret}\cdot J \qquad \overleftrightarrow{\mathcal{F}}\cdot G_{ret}=\delta$$

$$\bar\Phi_{sym}[J]=G_{sym}\cdot J \qquad \overleftrightarrow{\mathcal{F}}\cdot G_{sym}=\delta$$

platí

$$G_c = G_{ret}-G_{adv} \qquad \phi_c[J]=\bar\Phi_{ret}[J]-\bar\Phi_{adv}[J]$$

kde $\phi_c[J]=G_c\cdot J \qquad \overleftrightarrow{\mathcal{F}}\cdot\phi_c[J]=0$

důkaz:

$$\overrightarrow{\mathcal{F}}\cdot\left(\bar\Phi_{adv}[J]+\phi_c[J]\right) = J$$

$$D_c[\Sigma_i]\cdot\left(\bar\Phi_{adv}[J]+\phi_c[J]\right) = -G_c\cdot \underbrace{\partial\mathcal{F}[\Sigma_i]}_{\partial\mathcal{F}[\Sigma_f]+\partial\mathcal{F}[\partial\Omega]}\cdot\left(\bar\Phi_{adv}[J]+\phi_c[J]\right)$$

$$= -G_c\cdot\partial\mathcal{F}[\Sigma_f]\cdot\left(\bar\Phi_{adv}[J]+\phi_c[J]\right) - G_c\cdot\left(\chi[\Omega]\overrightarrow{\mathcal{F}}-\overleftarrow{\mathcal{F}}\chi[\Omega]\right)\cdot\left(\bar\Phi_{adv}[J]+\phi_c[J]\right)$$

$$= D_c[\Sigma_f]\cdot\phi_c[J] - G_c\cdot\chi[\Omega]\overrightarrow{\mathcal{F}}\cdot\bar\Phi_{adv}[J] = \phi_c[J]-G_c\cdot J=0$$

$\Downarrow$

$\bar\Phi_{adv}[J]+\phi_c[J]=\bar\Phi_{ret}[J]$ c.b.d.

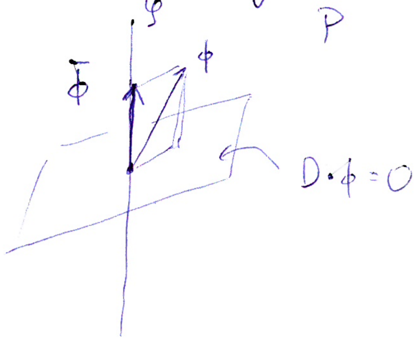
platí

$$G_{adv}=G_{ret}^T \qquad G_{sym}^T=G_{sym} \qquad G_c^T=-G_c$$

Vnoření $\mathcal{S}$ a $\mathcal{S}^*$ do P a P^*

$\mathcal{S} \subset P$ řešení Φ je polní konfigurace

$\mathcal{S}^* \not\subset P^*$ lin. funkcionál na $\mathcal{S}$ nelze kanonicky vnořit P^*



projektor

$D: P \to \mathcal{S} \qquad \phi \to \bar\phi = D\cdot\phi$

$D^*: \mathcal{S}^* \to P^* \qquad \bar a \to a = \bar a \circ D$

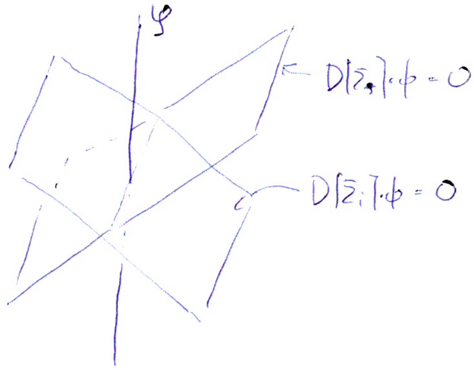
Cauchyho propagátor

$D: P \to \mathcal{S}$ vyvíjí kanon. data ze Σ

$D_c[\Sigma] = - G_c \cdot \partial f[\Sigma]$

na $\mathcal{S}$ nezávisí na Σ

na P závisí na Σ



$\bar a \in \mathcal{S}^*$ lin. funkcionál na řešení

$a[\Sigma] = \bar a \circ D_c[\Sigma] = - \bar a \cdot G_c \cdot \partial f[\Sigma] = \alpha \cdot \partial f[\Sigma]$

$\bar a \to a[\Sigma]$ závisí na Σ

$\bar a \to \alpha = + \bar a \circ G_c = - G_c \circ \bar a$ nezávisí na Σ

„zvednutí" indexu $\qquad \alpha = {}^{\#}\bar a \qquad \alpha^x = G_c^{xy}\, a[\Sigma]_y$

Poissonovy závorky

$\{A,B\} = \underbrace{dA \circ G_c \circ dB}_{\text{na } \mathcal{S}} = - {}^{\#}dA \cdot \partial f \cdot G_c \cdot \partial f \cdot {}^{\#}dB$

$= + {}^{\#}dA \cdot \partial f \cdot {}^{\#}dB = X_A \cdot dB$

$X_A = - G_c \cdot dA$

Lineární pozorovatelné na $\mathcal{S}$

$L = l \circ \phi \qquad l \in \mathcal{S}^* \qquad \lambda = l \cdot G_c \in \mathcal{S}$

$L_\lambda = \phi \cdot \partial f \cdot \lambda = - \phi \cdot \partial f \cdot G_c \cdot l = \phi \cdot l = L$

$\{L_{\lambda_1}, L_{\lambda_2}\} = - \lambda_1 \cdot \partial f \cdot G_c \cdot \partial f \cdot \lambda_2 = \lambda_1 \cdot \partial f \cdot \lambda_2$