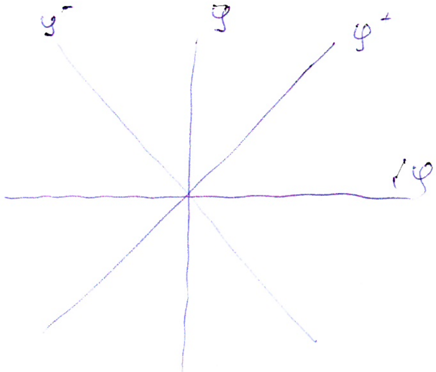
Rozštěpení na positivně a negativně frekvenční řešení

(skalární pole)



$\mathcal{S}$ prostor reálných řešení

$\mathcal{S}^c = \mathcal{S} \oplus i\mathcal{S}$ pr. komplex. řeš.

positivně a neg. fr. řešení
(zobecnění – souvislost s frekvencemi později)

$\mathcal{S}^\pm \subset \mathcal{S}^c \qquad (\mathcal{S}^\pm)^* = \mathcal{S}^\mp$

$P^\pm$ projektor na $\mathcal{S}^\pm$

$(P^\pm)^2 = P^\pm \qquad P^+P^- = P^-P^+ = 0 \qquad P^+ + P^- = \delta$

komplexní struktura na $\mathcal{S}$

$J = i(P^+ - P^-) \qquad P^\pm = \frac{1}{2}(\delta \mp iJ)$ (nemá nic spol. se zdrojem)

$J^* = J$ $\quad J$ je operátor na $\mathcal{S}$ $\qquad J^2 = -\delta$

$\mathcal{S}^\pm$ vlastní podprostory J

$J \cdot \phi^\pm = \pm i \phi^\pm \qquad \phi^\pm \in \mathcal{S}^\pm$

volba J je ekvivalentní volbě $P^\pm$ tj. $\mathcal{S}^\pm$

neexistuje kanonická volba! $\rightarrow$ J_{p} označení

kompatibilita s ∂F

1) $J \cdot \partial F \cdot J = \partial F$ $\quad$ tj. $\quad J \cdot \partial F = -\partial F \cdot J$

$\Rightarrow \overline{\partial F} = J \cdot \partial F$ je symetrická bilin. forma na $\mathcal{S}$

$\overline{\partial F}_{xy} = J^z_x \partial F_{zy} = -\partial F_{xz} J^z_y = J^z_y \partial F_{zx} = \overline{\partial F}_{yx}$

2) $\overline{\partial F}$ je pos. definitní

pozn.:

1) zaručuje $P^\pm \cdot \partial F \cdot P^\pm = 0$

2) zaručuje $-iP^- \cdot \partial F \cdot P^+$ pos. definitní

Struktura Hilbertova pr. na $\mathcal{S}$

$\mathcal{S}$ jako komplexní vekt. pr. $\mathcal{S}_p$

$$i * \phi = J \cdot \phi$$

index p „čísluje“ konf. str.
nebudeme muset psát
jinak u vš. - závislých veličin
$J_p \quad P^{\pm}_p \quad \partial F_p \quad \langle\, ,\rangle_p \quad \phi^{\pm}_p \quad \ldots$

tj. $(a+ib) * \phi = a\phi + b\, J \cdot \phi$

skalární součin na $\mathcal{S}$

$$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle = \phi_1 \cdot \tfrac{1}{2}\left(\overline{\partial F} - i\, \partial F \right) \cdot \phi_2$$

$$= -i\, \phi_1^- \cdot \partial F \cdot \phi_2^+ = \phi_1^- \cdot \overline{\partial F} \cdot \phi_2^+$$

kde $\phi^{\pm} = P^{\pm} \cdot \phi$ jsou pos/neg fr. části ϕ

platí

$$\langle i * \phi_1, \phi_2 \rangle = -i \langle \phi_1, \phi_2 \rangle$$

$$\langle \phi_1, i * \phi_2 \rangle = i \langle \phi_1, \phi_2 \rangle$$

$$\langle \phi, \phi \rangle \geq 0 \qquad \text{(díky posit. } \overline{\partial F}\text{)}$$

$$J = \left(\begin{array}{c|c} iP^+ & 0 \\ \hline 0 & -iP^- \end{array} \right)$$

na $\mathcal{S}_0$ platí

$$J \cdot P^{\pm} = \pm i\, P^{\pm}$$

$$P^{\pm} \cdot \partial F = \partial F \cdot P^{\mp}$$

$$P^{\pm} \cdot \overline{\partial F} = \overline{\partial F} \cdot P^{\mp}$$

$$\partial F = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \partial F_{-+} \\ \hline \partial F_{+-} & 0 \end{array} \right) \qquad \overline{\partial F} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \overline{\partial F}_{-+} \\ \hline \overline{\partial F}_{+-} & 0 \end{array} \right)$$

J-linearita na $\mathcal{S}$ $\Leftrightarrow$ $J \cdot L = L \cdot J$ $\Leftrightarrow$ $P^{\pm} \cdot L = L \cdot P^{\pm}$
$$\left(\begin{array}{c|c} L_{++} & 0 \\ \hline 0 & L_{--} \end{array} \right)$$

J-antilinearita na $\mathcal{S}$ $\Leftrightarrow$ $J \cdot A = -A \cdot J$, $\quad P^{\pm} \cdot A = A \cdot P^{\mp}$
$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & A_{+-} \\ \hline A_{-+} & 0 \end{array} \right)$$

na pos/neg fr. módech se násobení $*$ realizuje:

$$a * \phi^+ = a\, \phi^+ \qquad i * P^+ = i P^+$$

$$a * \phi^- = \bar{a}\, \phi^- \qquad i * P^- = -i P^-$$

důkaz rozkladů do báze:

$$-i\, u_k^- \cdot \partial f \cdot u_l^+ = \delta_{kl} \qquad / \, u_k^+ \quad \sum_k$$

$$\Downarrow \quad -i \sum_k u_k^+ u_k^- \cdot \partial f \cdot u_l^+ = u_l^+$$

$$-i \sum_k u_k^+ u_k^- \cdot \partial f \cdot u_l^- = 0 \qquad \Leftarrow \quad \partial f^{--} = 0$$

$$\Downarrow \quad -i \sum_k u_k^+ u_k^- \cdot \partial f \cdot u_l = P^+ \cdot u_l \qquad \forall l$$

$$\Downarrow \quad -i \sum_k u_k^+ u_k^- \cdot \partial f = P^+ \qquad /^*$$

$$\Downarrow \quad i \sum_k u_k^- u_k^+ \cdot \partial f = P^-$$

$$\Downarrow \quad J = iP^+ - iP^- = \sum_k \left(u_+^k u_k^- + u_k^- u_k^+ \right) \cdot \partial f$$

$$\delta_\varphi = P^+ + P^- = -i \sum_k \left(u_k^+ u_k^- - u_k^- u_k^+ \right) \cdot \partial f \qquad / \cdot G_c$$

$$G_c = i \sum_k \left(u_k^+ u_k^- - u_k^- u_k^+ \right)$$

zadání pos/neg rozštěpení pomocí báze

báze $u_k^+ \; u_k^-$ v $\mathcal{G}^\mathbb{C}$ splňující

$$u_k^\pm \cdot \partial f \cdot u_l^\pm = 0$$

$$-i u_k^- \cdot \partial f \cdot u_l^+ = \delta_{kl}$$

$$(u_k^\pm)^* = u_k^\mp$$

definuje pos/neg rozštěpení

$$P^+ = -i \sum_k u_k^+ u_k^- \cdot \partial f$$

$$P^- = i \sum_k u_k^- u_k^+ \cdot \partial f$$

$$J = \sum_k \left(u_k^+ u_k^- + u_k^- u_k^+ \right) \cdot \partial f$$

reálná báze

$$u_k = u_k^+ + u_k^-$$

je ortonormální ve smyslu $\langle , \rangle$

$$\langle u_k, u_l \rangle = \delta_{kl}$$

p-ortonormální báze

$\mathcal{S}_p$ $\langle\, ,\, \rangle_p$ Hilbertův prostor

existuje ortonorm. báze

u_k $k\in I$ (index. mn.)

$\langle u_k, u_l\rangle = \delta_{kl}$

u_k^+ positivní fr. módy – báze v $\mathcal{S}_p^+$

u_k^- negativní fr. módy – báze v $\mathcal{S}_p^-$

u_k^+ u_k^- tvoří bázi v $\mathcal{S}^p$ splňující

$u_k^\pm \cdot \partial F \cdot u_l^\pm = 0$ $\Leftarrow \partial F^{++} = \partial F^{--} = 0$

$-i\, u_k^- \cdot \partial F \cdot u_l^+ = \delta_{kl}$ $\Leftarrow \langle \phi, \psi\rangle = -i \bar{\phi} \partial F \psi^+$

$(u_k^\pm)^* = u_k^\mp$

koeficienty vůči bázi

$$\phi = \sum_k a_k * u_k = \qquad u_k = u_k^+ + u_k^-$$

$$= \sum_k \left(a_k u_k^+ + a_k^* u_k^-\right)$$

$$a_k = \langle u_k, \phi\rangle = -i\, u_k^- \cdot \partial F \cdot \phi$$

$$a_k^* = \langle \phi, u_k\rangle = i\, u_k^+ \cdot \partial F \cdot \phi$$

$$\{a_k, a_l^*\} = -u_k^- \cdot \partial F \cdot G_c \cdot \partial F \cdot u_l^+ = u_k^- \cdot \partial F \cdot u_l^+$$

$$= i\,\delta_{kl}$$

úplnost

$$\langle\ ,\ \rangle = \sum_k \langle\ , u_k\rangle\langle u_k,\ \rangle$$

$G_c = i \sum_\kappa \left(u_\kappa^+ u_\kappa^- - u_\kappa^- u_\kappa^+\right)$ $\qquad P^+ = -i \sum_\kappa u_\kappa^+ u_\kappa^- \cdot \partial F$

$J = \sum_\kappa \left(u_\kappa^+ u_\kappa^- + u_\kappa^- u_\kappa^+\right) \cdot \partial F$ $\qquad P^- = i \sum_\kappa u_\kappa^- u_\kappa^+ \cdot \partial F$