KVANTOVÁNÍ POLE

Proces kvantování

přeměna klasických pozorovatelných na operátory splňující stejné alg. vztahy a komutační relace indukované Poisson. z.

$$A = F(A_1, A_2, \dots) \quad \longrightarrow \quad \hat{A} = F(\hat{A}_1, \hat{A}_2, \dots)$$

$$\{A, B\} = C \quad \longrightarrow \quad i[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{C}$$

nejednoznačné zadání

problém uspořádání - co je $F(\hat{A}_1, \hat{A}_2, \dots)$?

nelze naplnit pro všechny pozorovatelné

obvykle se provede pro "základní" sadu pozorovat.

Př: např. funkce polohy a pozorov. lineární v hybnosti

$$f(x) \rightsquigarrow \hat{F}_f \qquad \text{pozorovat. polohy}$$

$$\vec{a}(x)\cdot p \rightsquigarrow \hat{G}_{\vec{a}} \qquad \text{pozorovat. lin. v hybnosti}$$

$$\{f_1, f_2\} = 0 \rightsquigarrow [\hat{F}_{f_1}, \hat{F}_{f_2}] = 0$$

$$\{f, \vec{a}\cdot p\} = -\vec{a}\cdot df \rightsquigarrow [\hat{F}_f, \hat{G}_{\vec{a}}] = i\hat{F}_{\vec{a}\cdot df}$$

$$\{\vec{a}_1\cdot p, \vec{a}_2\cdot p\} = [\vec{a}_1, \vec{a}_2]\cdot p \rightsquigarrow [\hat{G}_{\vec{a}_1}, \hat{G}_{\vec{a}_2}] = -i\hat{G}_{[\vec{a}_1, \vec{a}_2]}$$

Př: pro lineární konf. prostor a volbu lin. báze x^i

$$p_i = \frac{\vec{\partial}}{\partial x^i}\cdot p \qquad \frac{\vec{\partial}}{\partial x^i} \text{ konst.}$$

$$[\hat{x}^k, \hat{x}^l] = 0 \qquad \hat{x}^k = \hat{F}_{x^k}$$

$$[\hat{x}^k, \hat{p}_l] = i\,\mathbb{1} \qquad \hat{p}_l = \hat{G}_{\frac{\partial}{\partial x^l}}$$

$$[\hat{p}_k, \hat{p}_l] = 0$$

Kvantování skalárního pole

základní polní pozorovatelné

$$\Phi^x(\phi) = \phi(x)$$

$\overleftrightarrow{F} \cdot \Phi = J$ — pohybové rovnice

$\{\Phi^x, \Phi^y\} = G_c^{xy}$ — Poissonovy závorky

všechny pozorovatelné lze dělat jako fce Φ^x
pokud a hybnosti jsou lineární ve Φ^x

Heisenbergův popis

pozorovatelné jsou indexované plochou v prostoru.
stavy se v čase nemění
zajímá nás vztah různě lokalizovaných pozorov.
při působení na stejný stav

kvantování základní polní pozorovatelné

$\hat{\Phi}^x$ — pole nabývající oper. hodnot

$\overleftrightarrow{F} \cdot \hat{\Phi} = J\,\mathbb{1}$ — dynamika

$[\hat{\Phi}^x, \hat{\Phi}^y] = -i\, G_c^{xy}\, \mathbb{1}$ — komutační relace

pozorovatelné lineární v poli

$L_\varphi = \varphi \cdot \partial F \cdot \phi$ $\qquad \{L_{\varphi_1}, L_{\varphi_2}\} = \varphi_1 \cdot \partial F \cdot \varphi_2$

$\hat{L}_\varphi = \varphi \cdot \partial F \cdot \hat{\Phi}$ — lin pozorov. asoc. s módem φ

$[\hat{L}_{\varphi_1}, \hat{L}_{\varphi_2}] = -i\, \varphi_1 \cdot \partial F \cdot \varphi_2\, \mathbb{1}$ — komutační relace

kvadratické pozorovatelné

$K = \frac{1}{2}\, \phi \cdot K \cdot \phi$ — klasická pozorov.

$\hat{K} = \frac{1}{2}\, \hat{\Phi} \cdot K \cdot \hat{\Phi} + k\,\mathbb{1}$ — kvantová verze

obecně problém s koincidenční limitou a
s uspořádáním operátorů – viz $k\mathbb{1}$ člen

Algebraické kvantování

začíná se s algebrou pozorovatelných generovanou $\hat{\mathcal{I}}$ (či zhlazenou verzí)

stavy jsou funkcionály na pozorovatelných (zahrnuje i smíšené stavy)

matematicky korektní, ale obtížné pracovat s čistými stavy a standardním formalismem kv. mech.

Reprezentace na Hilbertově prostoru

reprezentujeme algebru pozorov. jako operátory na Hilb. pr. $\mathcal{H}$

existují neekvivalentní reprezentace
- intuitivně - různé sektory stavů (fólia) mezi kterými je transformace degenerovaná (např. stav s průměrný - nekonečný - počtem částic)

dva přístupy:
- a) vybrat jedno fólio, kt. obsahuje fyz. stavy
- b) pracovat s více fólii a chápat "nedostupné" stavy jako idealizaci

a) zahrnují se tzv. Hadamardovy stavy

b) lze formalizovat v algebr. kvantování

většinou se pracuje pouze formálně na jakémsi "velkém" Hilbertově prostoru a nebojíme se nekonečen a degenerací

Hodnotová reprezentace

analog x-p kvantování obyčejné částice

základ pozorovatelné na Σ

$$\hat{\varphi} = \hat{\varphi}[\Sigma] \qquad \hat{\pi} = \hat{\pi}[\Sigma]$$

vlastní stavy

$$|val:\varphi\rangle \qquad \hat{\varphi}^x |val:\varphi\rangle = \varphi^x |val:\varphi\rangle$$

$$|hyb:\pi\rangle \qquad \hat{\pi}_x |hyb:\pi\rangle = \pi_x |hyb:\pi\rangle$$

$|val:\varphi\rangle$ číslované fcí $\varphi \in \mathcal{V}[\Sigma]$

$|hyb:\pi\rangle$ číslované hustot. $\pi \in \mathcal{V}[\Sigma]^*$

problémy s normalizací a charakter. reprezentace (patří $\hat{\varphi}[\Sigma]$, $\hat{\pi}[\Sigma]$ pro různé Σ do stejného fólia ?)

Částicová reprezentace

pomocí zákl. pozorov. $\hat{\Phi}$ lze zkonstruovat
báze stavů mající "kusovou" (= kvantovou)
povahu - tyto stavy nazýváme částicové
konstrukce není jednoznačná
různé volby lze charakterizovat volbou
pos.-neg. frekv. rozštěpení
částicová interpretace
dána pos.-neg. fr. rozštěpením
tj. lze charakterizovat pomocí J, P^+, P^-
definuje · vakuum (vac⟩
- jednočást. stavy isomorfní $\mathcal{S}_J$
- vícečást. stavy
- koherentní stavy
- normální uspořádání a příbuzné struktury

Kreační a anihilační operátory

mějme komplexní strukturu J na $\mathcal{S}$ a mód $\phi \in \mathcal{S}$

$$\hat{a}[\phi] = \langle \phi, \hat{\Phi} \rangle = -i\,\phi^- \cdot \partial \mathfrak{f} \cdot \hat{\Phi} = -i\,\phi \cdot \partial \mathfrak{f} \cdot \hat{\Phi}^+$$

$$\hat{a}[\phi]^\dagger = \langle \hat{\Phi}, \phi \rangle = i\,\phi^+ \cdot \partial \mathfrak{f} \cdot \hat{\Phi} = i\,\phi \cdot \partial \mathfrak{f} \cdot \hat{\Phi}^-$$

komutační relace

$$[\hat{a}[\phi_1], \hat{a}[\phi_2]^\dagger] = -i\,\phi_1^- \cdot \partial \mathfrak{f} \cdot [\hat{\Phi}, \hat{\Phi}] \cdot \partial \mathfrak{f} \cdot \phi_2^+ (-i)$$

$$= -i\,\phi_1^- \cdot \partial \mathfrak{f} \cdot \phi_2^+ \,\hat{\mathbb{1}} = \langle \phi_1, \phi_2 \rangle \,\hat{\mathbb{1}}$$

$$[\hat{a}[\phi_1], \hat{a}[\phi_2]] = 0 \qquad \Leftarrow \quad \phi_1^- \cdot \partial \mathfrak{f} \cdot \phi_2^- = 0$$

$$[\hat{a}[\phi_1]^\dagger, \hat{a}[\phi_2]^\dagger] = 0 \qquad \Leftarrow \quad \phi_1^+ \cdot \partial \mathfrak{f} \cdot \phi_2^+ = 0$$

lze interpretovat jako

$\hat{a}[\phi]$ anihilační operátor módu $\phi \in \mathcal{S}$

$\hat{a}[\phi]^\dagger$ kreační operátor módu ϕ

Fokovská báze

mějme částicovou interpr. I

$\hat{a}[\phi]$, $\hat{a}[\phi]^\dagger$ anihil. a kreač. operátory

vakuum

$|vac\rangle$ $\qquad \hat{a}[\phi]|vac\rangle = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{S}$

$\langle vac|vac\rangle = 1$

jednočásticové stavy

mód $\phi \in \mathcal{S}$ $\rightarrow$ $\hat{a}[\phi]^\dagger |vac\rangle$

isomorf. s prostorem $\mathcal{S}$,

$\phi \leftrightarrow \hat{a}[\phi]^\dagger|vac\rangle$

$i * \phi \leftrightarrow i\,\hat{a}[\phi]^\dagger|vac\rangle$

$\langle \phi_1, \phi_2\rangle \leftrightarrow \langle vac|\hat{a}[\phi_1]\,\hat{a}[\phi_2]^\dagger|vac\rangle$

normování na 1 pro módy $\langle\phi,\phi\rangle = 1$

vícečásticové stavy

$\hat{a}[\phi_1]^\dagger\,\hat{a}[\phi_2]^\dagger \dots |vac\rangle$

obecně nenorm-ované – závisí na $\phi_1, \phi_2, \dots$

báze nezávislých módů

u_k – normal. báze $\qquad \langle u_k, u_l\rangle = \delta_{kl}$

$\hat{a}_k = \hat{a}[u_k]$ anihil. oper. v módu u_k

$\hat{a}^\dagger_k = \hat{a}[u_k]^\dagger$ kreační oper. v módu u_k

$[\hat{a}_k, \hat{a}^\dagger_l] = \delta_{kl} \qquad [\hat{a}_k, \hat{a}_l] = 0 \qquad [\hat{a}^\dagger_k, \hat{a}^\dagger_l] = 0$

vícečásticové stavy v módech u_k

$$|\mathbf{u}:\mathbf{m}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{m}!}}\,\hat{a}[\mathbf{u}]^{\dagger\mathbf{m}}\,|vac\rangle$$

$\mathbf{u} = \{u_k\} \qquad \mathbf{m} = \{m_k\} \qquad m_k \in \mathbb{N}_0 \qquad \mathbf{m}! = \prod_k m_k!$

$\hat{a}[\mathbf{u}]^{\dagger\mathbf{m}} = \prod_k \hat{a}[u_k]^{\dagger m_k}$

normalizace $\quad \langle \mathbf{u}:\mathbf{m}|\mathbf{u}:\mathbf{n}\rangle = \delta_{\mathbf{m},\mathbf{n}} = \prod_k \delta_{m_k, n_k}$

rozklad pole do báze

$$\hat{\Phi} = \sum_k \big(\underbrace{\hat{a}_k u_k^+}_{\hat{\Phi}^+} + \underbrace{\hat{a}_k^+ u_k^-}_{\hat{\Phi}^-} \big)$$

$\hat{\Phi}^+$ obsahuje anihilační operátory

$\hat{\Phi}^-$ obsahuje kreační operátory

operátory počtu částic

$$\hat{n}[\phi] = \frac{\hat{a}[\phi]^+ \hat{a}[\phi]}{\langle \phi, \phi \rangle}$$ počet částic v módu ϕ

$$\hat{n}[\phi] \underbrace{\hat{a}[\phi]^{+m} |vac\rangle}_{\text{vlastní vektor } \hat{n}[\phi]} = m \, \hat{a}[\phi]^{+m} |vac\rangle$$

$$\hat{n}[\phi] \, \hat{a}[\psi]^{+m} |vac\rangle = 0 \qquad \text{pro } \langle \phi, \psi \rangle = 0$$

$$\langle vac| \hat{a}[\psi] \, \hat{n}[\phi] \, \hat{a}[\psi]^+ |vac\rangle = \frac{\langle \psi | \phi \rangle \langle \phi | \psi \rangle}{\langle \phi, \phi \rangle}$$

počet částice ϕ ve stavu ψ je dán projekcí ψ na ϕ

počet částic v módu u_k

$$\hat{n}_k = \hat{n}[u_k] = \hat{a}_k^+ \hat{a}_k$$

$$\hat{n}_k |u:m\rangle = m_k |u:m\rangle$$

celkový počet částic

$$\hat{N} = \sum_k \hat{n}_k = \sum_k \langle \hat{\Phi}, u_k \rangle \langle u_k, \hat{\Phi} \rangle$$

$$= \langle \hat{\Phi}, \hat{\Phi} \rangle$$ nezávisí na volbě báze!

$$\hat{N} |u:m\rangle = \Big(\sum_k m_k \Big) |u:m\rangle$$