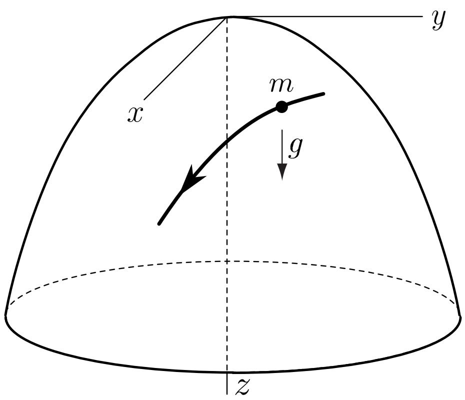
Příklad z teoretické mechaniky č. 1 (2018)

Pomocí Lagrangeových rovnic I. druhu řešte pohyb objektu hmotnosti m po povrchu, jenž má tvar rotačního paraboloidu otevřeného směrem dolů. Pohyb se odehrává bez tření vlivem homogenního gravitačního pole g působícího dolů v kladném směru osy z:



1. Povrch lze popsat holonomní vazbou

$$\phi \equiv x^2 + y^2 - kz = 0\,,$$

   kde k je kladná konstanta. Explicitně sestavte příslušné Lagrangeovy rovnice.

2. Dosazením těchto rovnic do druhé časové derivace vazby ukažte, že Lagrangeův multiplikátor má tvar

$$\lambda = \frac{m\,[kg - 2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)]}{k\,(k + 4z)}\,.$$

3. Ze zákona zachování energie E odvoďte vztah $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2E/m + 2gz - \dot{z}^2$ a pomocí něj vyjádřete funkci $\lambda(z, \dot{z})$.

4. Dosazením $\lambda(z, \dot{z})$ do Lagrangeovy rovnice obsahující $\ddot{z}$ odvoďte pohybovou rovnici

$$(4z + k)\,\ddot{z} + 2\dot{z}^2 - 8gz - 4E/m = 0\,.$$

5. Nalezněte všechna speciální řešení této diferenciální rovnice, jež lze v každém čase t psát ve tvaru $z(t) = C\,t^2$, kde C je konstanta, tedy odvoďte všechny přípustné konstantní hodnoty C, E a odpovídající funkce $z(t)$, $\lambda(t)$. Diskutuje, co tato matematická řešení znamenají fyzikálně.

6. Nalezněte všechny funkce $z(t)$, pro která je všude $\lambda = 0$. Nápověda: užijte explicitní tvar $\lambda(z, \dot{z})$ odvozený v bodě 3. a integrujte příslušnou diferenciální rovnici 1. řádu.

J. Podolský, ÚTF, 16. 10. 2018