

Příklad z teoretické mechaniky č. 1 (2025)

Nalezněte tvar lana či řetězu konstantní lineární hustoty ρ zavěšeného v gravitačním poli \mathbf{g} rovnovážně mezi pevnými závěsy na protilehlých stěnách. Příslušná křivka se nazývá *řetězovka*.

Konkrétní úlohy a nápověda postupu:

1. Za pomoci obrázku, na kterém jsou znázorněny síly působící ve směru tečen na konce elementu lana ds , nejprve vysvětlete, proč pro vodorovné a svislé složky těchto sil musí platit

$$F_x(x + dx) - F_x(x) = 0,$$

$$F_y(x + dx) - F_y(x) = \rho g \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Označme vodorovnou složku síly $F_x = k \equiv \text{konst.}$. Protože síly v laně mají směr jeho tečny, platí $y' = F_y/F_x$. Odvoďte, že tvar řetězovky $y(x)$ je určen rovnicí $y'' = \frac{\rho g}{k} \sqrt{1 + y'^2}$.

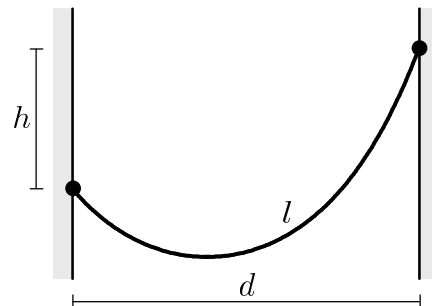
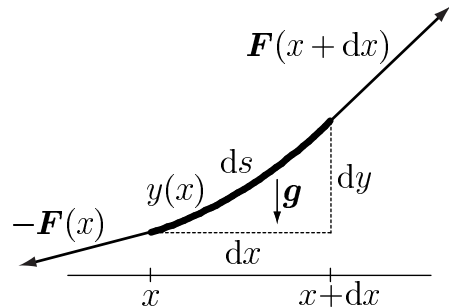
2. Analytickým postupem ukažte, že obecné řešení této diferenciální rovnice je

$$y(x) = \frac{k}{\rho g} \cosh \left[\frac{\rho g}{k} (x - x_0) \right] - \frac{k}{\rho g} + y_0.$$

3. Potom vyjádřete konstantu k pomocí geometrických parametrů úlohy d, h a l , kde d je vodorovná vzdálenost konců lana, h je jejich svislá vzdálenost, a l je délka lana:

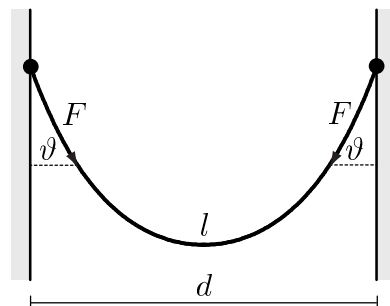
Konkrétně ukažte, že k je řešením rovnice

$$\sinh \left(\frac{\rho g d}{2k} \right) = \frac{\rho g}{2k} \sqrt{l^2 - h^2}.$$



4. Nyní předpokládejte, že oba konce lana jsou umístěny ve stejné výši, tedy $h = 0$: Zjistěte velikost síly F , jíž lano působí na oba závěsy. Díky symetrii je průmět F do svislého směru roven polovině celkové tíhy $\rho g l$. Pomocí parametru k vyjádřete l i koncový úhel ϑ (použitím vztahu $|y'| = \tan \vartheta$). Tím odvodíte

$$F(k) = k \cosh \left(\frac{\rho g d}{2k} \right).$$



5. Najděte, kdy je tato síla F na závěsy *minimální*: ukažte, že extrém funkce $F(k)$ je dán transcendentní rovnicí $\xi \tanh \xi = 1$, kde $\xi = \rho g d / (2k)$, nalezněte numerické řešení této rovnice pro ξ a odtud spočítejte příslušný koncový úhel ϑ i to, kolikrát musí být příslušná délka lana l větší než vzdálenost závěsů d .