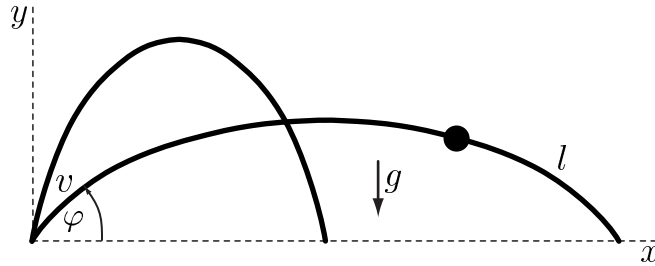


## Příklad z teoretické mechaniky č. 1 (2016)

Studujte trajektorii projektilu, který byl v homogenním gravitačním poli vystřelen počáteční rychlostí  $v$ , a to pod úhlem  $\varphi$  vůči zemi. Počátek souřadnic  $(x, y)$  položte do místa výstřelu, vodorovnou osu  $x$  ztotožněte se zemí a svislou osu  $y$  zvolte vzhůru (proti směru gravitačního pole velikosti  $g$ ), viz obrázek. Projektil považujte za hmotný bod a zanedbejte odpor prostředí.



1. Sestavte Newtonovy pohybové rovnice, najděte jejich obecné řešení a ukažte, že pro počáteční podmínky zadané v čase  $t = 0$  je trajektorie projektilu dána vztahy

$$x(t) = v t \cos \varphi, \quad (1)$$

$$y(t) = v t \sin \varphi - \frac{1}{2} g t^2. \quad (2)$$

Kdy a kde dosáhne nejvyšší výšky? Neboli: určete  $t_{\max}$ ,  $x_{\max}$  a  $y_{\max}$  pro daný úhel  $\varphi$ .

2. Určete, pro který úhel  $\varphi_x$  má projektil (vystřelený s danou počáteční rychlostí  $v$ ) největší dolet v horizontálním směru  $x$ . Jaká je tato největší vzdálenost? Kolik činí, jestliže je projektil vystřelen ze zemského povrchu právě rychlostí zvuku?
3. Vyloučením časového parametru  $t$  z (1) a (2) odvoďte vztah  $y(x, \varphi)$  pro tvar dráhy. Vykreslete (nebo načrtněte) ho pro několik různých hodnot úhlu vystřelení  $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ .
4. Nyní spočítejte *délku* trajektorie od výstřelu po dopad na zem

$$l = \int \sqrt{dx^2 + dy^2} = 2 \int_0^{t_{\max}} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

pro pohyb projektilu (1), (2). Ukažte, že

$$l(\varphi) = \frac{v^2}{g} \left[ \sin \varphi + \cos^2 \varphi \ln \left( \frac{1 + \sin \varphi}{\cos \varphi} \right) \right]. \quad (3)$$

5. Diskutujte limitní případy délky trajektorie  $l(\varphi)$  pro  $\varphi = 0$  a  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ .
6. Odvoďte podmínku, pro jaký úhel  $\varphi_l$  je délka trajektorie (3) *největší* (při stejné počáteční rychlosti  $v$ ). Numericky ji vyřešte, tedy explicitně nalezněte hodnotu úhlu  $\varphi_l$  a porovnejte ji s hodnotou  $\varphi_x$ .