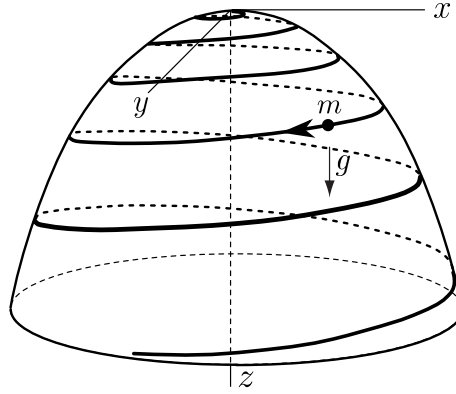


Příklad z teoretické mechaniky č. 2 (2018)

Zkoumejte pohyb objektu hmotnosti m po sestupné spirále ležící na povrchu rotačního paraboloidu $x^2 + y^2 = kz$. Jednorozměrný pohyb se odehrává bez tření v homogenním gravitačním poli g působícím směrem dolů v kladném směru osy z :



1. Spirála začíná ve vrcholu a je definována vztahy

$$\begin{aligned}x &= a \varphi \cos \varphi, \\y &= a \varphi \sin \varphi, \\z &= b \varphi^2,\end{aligned}\tag{1}$$

kde $\varphi \in [0, \infty)$ je parameter, zatímco $a, b > 0$ jsou konstanty (přičemž $a^2 = kb$). Ukažte, že Lagrangeova funkce má tvar

$$L = \frac{1}{2}m [a^2 + (a^2 + 4b^2)\varphi^2] \dot{\varphi}^2 + mgb \varphi^2.$$

2. Spočítejte příslušnou pohybovou rovnici.
3. Nalezněte integrál pohybu.
4. Pomocí něj integrací metodou separace proměnných nalezněte závislost $t(\varphi)$ pro případ, kdy zachovávající se celková mechanická energie částice je nulová, tedy $E = 0$.
5. Pomocí integrálu pohybu z bodu 3. explicitně nalezněte závislost $\varphi(t)$ pro případ, kdy celková mechanická energie má přesně hodnotu

$$E = mg \frac{a^2 b}{a^2 + 4b^2}.$$

Ukažte, že úhlová frekvence $\dot{\varphi}$ oběhu [v průmětu do roviny (x, y)] je konstantní a určete její hodnotu. Dokážete tím takzvaný *izochronismus pádu těles podél spirály na paraboloidu*, viz historická poznámka s obrázky a odkazy na druhé straně textu.

J. Podolský, ÚTF, 6. 11. 2018

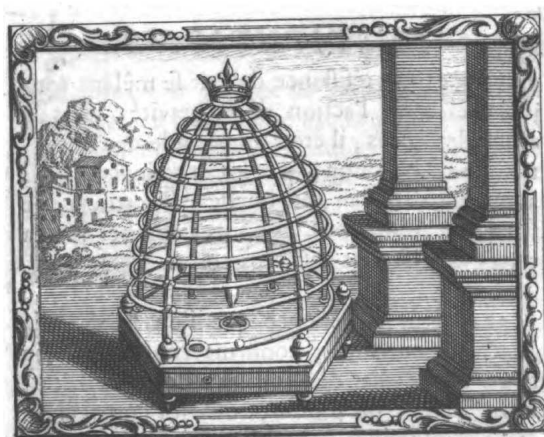
Historická poznámka, obrázky a odkazy:

Úloha, kterou jsme zde spočítali, věrně odpovídá pohybu kuliček v aparátu, který roku 1699 vynalezl francouzský karmelitánský mnich Jean Truchet. Jeho cílem bylo jasným způsobem experimentálně demonstrovat Galileův zákon pádu těles po nakloněné rovině. Jeden takový vzácný aparát je dnes ve sbírkách Galileova muzea ve Florencii:



Obrázek 1: Aparát pro demonstraci izochronismu pádu těles podél spirály na paraboloidu. Museo Galileo — Istituto e Museo di Storia della Scienza (Florencie, Itálie), inventární č. 976, místnost VII. První polovina 18. století, dřevo, mosaz, železo, průměr 625 mm, výška 780 mm. <https://catalogue.museogalileo.it/object/ApparatusToDemonstrateIsochronismFallsAlongSpiral.html>

Truchetův aparát byl ve své době slavný a sehrál významnou roli. Podrobně se mu věnovala například francouzská matematická, fyzická, filozofka a osvícenkyně markýza Émilie du Châtelet (1706–1749) ve svém spise *Institutions de physique*. Krásné vyobrazení tohoto aparátu uvozuje XIV. kapitolu:



CHAPITRE XIV.

Obrázek 2: Grafické vyobrazení Truchetova aparátu na straně 273 díla *Institutions de physique* markýzy du Châtelet (první vydání z roku 1740).

<https://www.e-rara.ch/download/pdf/1199382?name=Institutions%20de%20physique>