Příklad z teoretické mechaniky č. 2 (2024)

Zkoumejte pohyb nabité částice v poli pevného magnetického dipólu. Může to být třeba částice kosmického záření, která vletěla do magnetického pole Země (Störmerův problém).

Z elektrodynamiky víme, že magnetické pole $\boldsymbol{B}$ dipólu je dáno vektorovým potenciálem

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mu}{4\pi}\frac{\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{r}}{r^3}$$

pomocí vztahu $\boldsymbol{B} = \operatorname{rot}\boldsymbol{A}$, kde $\boldsymbol{M}$ je magnetický dipólový moment a $\boldsymbol{r}$ je polohový vektor.

Konkrétní úkoly:

1. Ukažte, že Lagrangeova funkce má v cylindrických souřadnicích ρ, φ, z tvar
$$L = \frac{1}{2}m(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2 + \dot z^2) + \frac{\mu e M}{4\pi}\left(\rho^2 + z^2\right)^{-3/2}\rho^2\dot\varphi\,,$$
kde m je hmotnost částice, e její náboj a M je velikost dipólového momentu $\boldsymbol{M}$, který je orientován do směru osy z. Užijte k tomu obecný výraz $L = \frac{1}{2}mv^2 + e\,\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}$ a vztah mezi kartézskými a cylindrickými souřadnicemi.

2. Z L určete Lagrangeovy pohybové rovnice (člen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi})$ nemusíte rozepisovat).

3. Najděte oba integrály pohybu pro zachovávající se veličiny λ a E.

4. Pomocí nich dokažte, že pohyb částice je určen vztahem
$$\tfrac{1}{2}m(\dot\rho^2 + \dot z^2) = E - V_{ef}(\rho, z)\,,$$
kde efektivní potenciál má tvar
$$V_{ef}(\rho, z) = \frac{1}{2m\rho^2}\left(\lambda - \frac{\mu e M}{4\pi}\frac{\rho^2}{\left(\rho^2 + z^2\right)^{3/2}}\right)^2.$$

5. Pro rozbor úlohy je výhodné přejít k bezrozměrným parametrům x a y definovaným
$$x \equiv \frac{\rho}{\rho_0}\,, \quad y \equiv \frac{z}{\rho_0}\,, \qquad \text{kde} \quad \rho_0 \equiv \frac{\mu e M}{4\pi\lambda} > 0\,.$$
Explicitně vyjádřete efektivní potenciál $V_{ef}(x, y)$.

6. Analyzujte možné pohyby v rovníkové rovině $y = 0$, kdy má efektivní potenciál tvar
$$V_{ef}(x) = \frac{\lambda^2}{2m\rho_0^2}\,\frac{(x-1)^2}{x^4}\,.$$
Konkrétně: Vyšetřete průběh funkce $V_{ef}(x)$ (chování v $0, \infty$, maxima, minima atd.), určete zakázané oblasti, diskutujte charakter všech možných trajektorií v závislosti na energii E, najděte stabilní a nestabilní kruhové orbity. Explicitně spočítejte body obratu v závislosti na bezrozměrném paramateru $\gamma \equiv \sqrt{2Em}\,\rho_0/\lambda > 0$.

Pro nadšence:

7. Můžete zkusit podobným způsobem studovat i obecný problém závislý na y, kdy je efektivní potenciál $V_{ef}(x, y)$ dán výrazem určeným v 5. bodě úlohy.

8. Chcete-li se pustit do numerické integrace pohybových rovnic, je vhodné nejprve přepsat pohybové rovnice odvozené ve 2. bodě úlohy pomocí bezrozměrných parametrů x, y a přeškálovat čas t na bezrozměrný časový paramater $\tau \equiv (\lambda/m\rho_0^2)\,t$.

J. Podolský, ÚTF, 11. 11. 2024