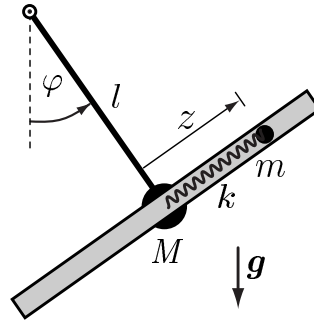


Příklad z teoretické mechaniky č. 2 (2025)

K závěsu matematického kyvadla délky l a hmotnosti M je kolmo připojena tenká trubička, v níž se bez tření hýbe hmotný bod m upevněný ke středu trubičky pružinou tuhosti k a nulové klidové délky. Vyšetřete pohyb této soustavy v gravitačním poli \mathbf{g} . Hmotnost závěsu, trubičky i pružiny zanedbejte.



Konkrétní úlohy:

1. Odvoďte Lagrangeovu funkci pro zobecněné souřadnice φ a z , kde φ je výchylka kyvadla z dolní polohy a z je vzdálenost m od M (viz obrázek).
2. Sestavte příslušné pohybové rovnice.
3. Z Lagrangeovy funkce nalezněte integrály pohybu.
4. Zlinearizujte kompletní pohybové rovnice ze 2. úlohy pro malé výchylky φ a malé vzdálenosti z . Potom ukažte, že linearizované rovnice se redukuje na soustavu

$$\ddot{z} + \left(\frac{M+m}{Mm} k - \frac{m g}{M l} \right) z = 0,$$
$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = \frac{m}{M l} \left(\frac{k}{m} - \frac{g}{l} \right) z.$$

5. Najděte obecné řešení této soustavy rovnic pro $z(t)$ a pak $\varphi(t)$. Diskutujte, za jaké podmínky na hodnotu tuhosti k zůstávají v platnosti předpoklady linearizace.