Příklad z teoretické mechaniky č. 2 (2016)

Analyzujte pohyb tzv. *převráceného kyvadla*. Jedná se o matematické kyvadlo (těleso m na nehmotném závěsu délky l v homogenním gravitačním poli g), jehož otočný bod osciluje nahoru a dolů dle funkce $y = -d\cos(\Omega t)$, kde d je *malá amplituda* a Ω je *velká úhlová frekvence*. Ukažte, že za těchto okolností existuje stabilní rovnovážná poloha $\varphi = \pi$, kolem níž kyvadlo kmitá „vzhůru nohama“.

1. Pomocí faktu, že tíhové zrychlení v systému spojeném s oscilujícím otočným bodem je $g + \ddot{y}$, odvoďte přesnou pohybovou rovnici
$$\ddot{\varphi} + \Big(\omega^2 + \varepsilon\,\Omega^2\cos(\Omega t)\Big)\sin\varphi = 0\,, \tag{1}$$
kde $\varepsilon = d/l$ a $\omega^2 = g/l$ (ω je typická frekvence malých kmitů když $d = 0$).

2. V případě $\varepsilon \ll 1$ hledejte řešení ve tvaru $\varphi(t) = \varphi_0(t) + A(t)\cos(\Omega t)$, kde φ_0 je řádu 1, zatímco A je malá amplituda řádu ε, tedy $A \sim \varepsilon$. Funkci $\sin\varphi$ rozviňte Taylorovým rozvojem. Poté proveďte tzv. vysokofrekvenční aproximaci: předpokládejte $\omega/\Omega \sim \varepsilon$ a že obě funkce $\varphi_0(t)$ i $A(t)$ se s časem mění na časové škále dané úhlovou frekvencí řádu ω, tj. například $\dot{A} \sim \omega A$. Dosaďte do pohybové rovnice a seřaďte všechny členy podle mocnin parametru ε. Dominantní členy (řádu nejnižší mocniny ε) dávají rovnici
$$A = \varepsilon\sin\varphi_0\,,$$
zatímco členy dalšího řádu dávají rovnici pro $\varphi_0(t)$ ve tvaru
$$\ddot{\varphi}_0 + \omega^2\sin\varphi_0 + \varepsilon A\Omega^2\cos^2(\Omega t)\cos\varphi_0 - 2\dot{A}\Omega\sin(\Omega t) = 0\,.$$

3. Tuto rovnici lze *vystředovat* přes celou krátkou periodu $2\pi/\Omega$ vynucených kmitů. Při tom lze pomalu se měnící funkce $\varphi_0(t)$, $A(t)$ nahradit jejich průměrnými hodnotami $\bar{\varphi}(t)$, $\bar{A}(t)$ za středovanou periodu; podobně pro jejich časové derivace. Dostaneme tím
$$\ddot{\bar{\varphi}} + \omega^2\sin\bar{\varphi} + \tfrac{1}{2}\varepsilon\bar{A}\Omega^2\cos\bar{\varphi} = 0\,.$$

4. Rovnici integrujte a ukažte, že chování kyvadla lze chápat jako pohyb v „potenciálu“
$$V(\bar{\varphi}) = -\frac{g}{l}\cos\bar{\varphi} + \frac{d^2\Omega^2}{4\,l^2}\sin^2\bar{\varphi}\,.$$
Nalezněte všechny rovnovážné polohy v potenciálu $V(\bar{\varphi})$ a vyšetřete jejich stabilitu. Zejména odvoďte podmínku, kdy je převrácená poloha $\bar{\varphi} = \pi$ stabilní.

5. Získané výsledky ověřte alternativním postupem: pohybovou rovnici (1) linearizujte předpokladem $\varphi = \pi + \theta$, kde θ je malé vůči π (výše aplikovaná omezení na velikosti konstant d a Ω zde nečiňte). Zavedením bezrozměrných parametrů
$$\xi \equiv \frac{1}{2}\Omega\,t\,, \qquad a \equiv -\frac{4g}{\Omega^2 l}\,, \qquad q \equiv \frac{2d}{l}$$
získáte rovnici
$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}\,\xi^2} + \Big(a - 2q\,\cos(2\xi)\Big)\,\theta = 0\,.$$
To je standardní tvar tzv. *Mathieuovy rovnice*. Její řešení (obvykle hledaná ve tvaru řad) závisejí na konkrétních hodnotách parametrů q a a: mohou být buď nestabilní (exponenciálně narůstat s ξ) nebo stabilní (oscilovat s frekvencí $\frac{1}{2}\beta\Omega$), *viz přiložený graf na druhé straně*. Proveďte stručnou diskusi a srovnání s předchozími výsledky. Konkrétně najděte, pro jaké hodnoty zrychlení otočného bodu $\ddot{y}_{\max} = \Omega^2\,d$ je převrácená poloha kyvadla s délkou $l = 2d$ stabilní.

J.Podolský, ÚTF, 26. 10. 2016

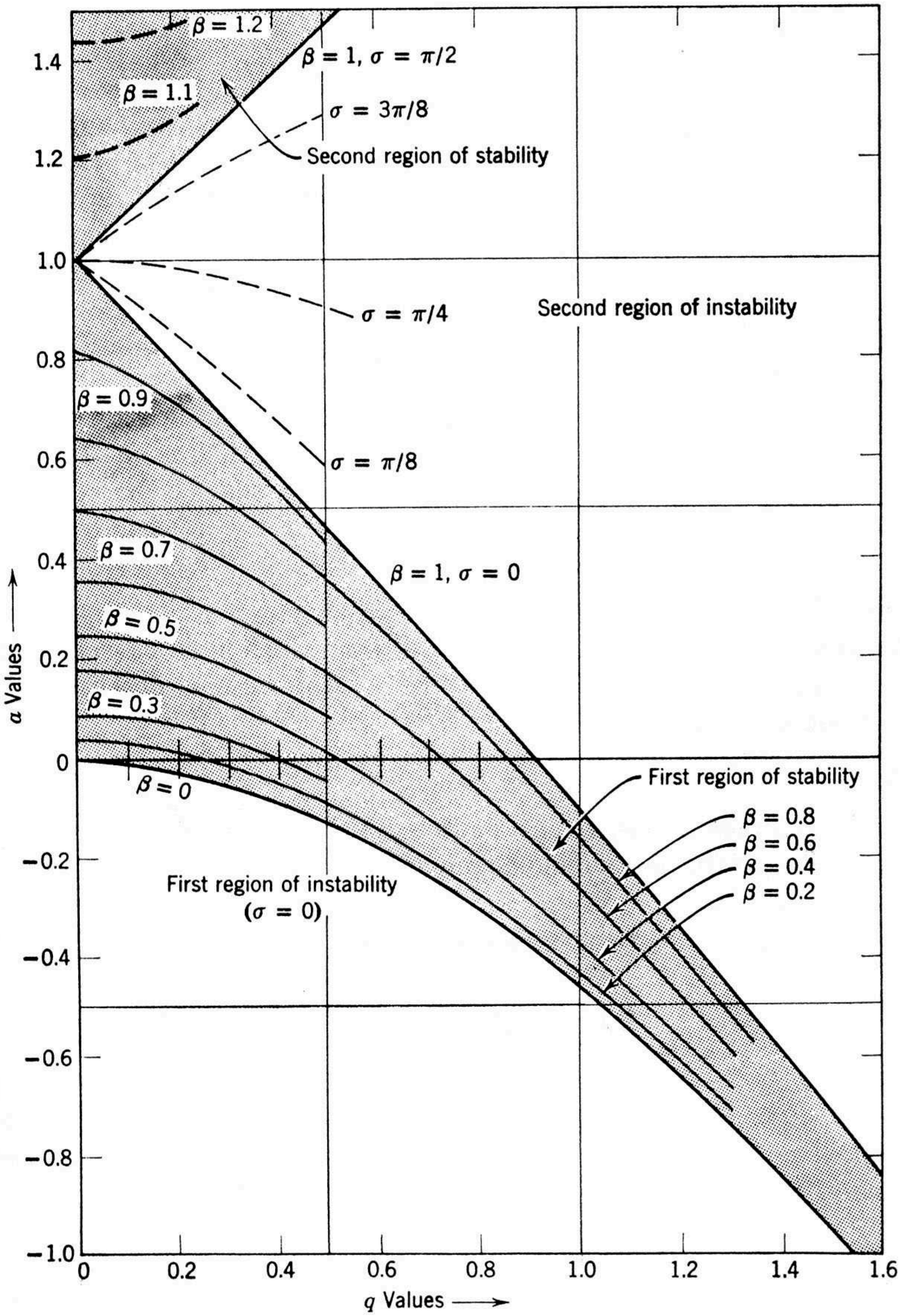

Fig. 26-1. Stability diagram for Mathieu's equation $\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + (a - 2q \cos 2\xi)\theta = 0.$