Příklad z teoretické mechaniky č. 2 (2017)

Ukažte, že Lagrangeovu funkci pro soustavu Země-Měsíc obíhající kolem (nehybného) Slunce lze psát

$$L = \tfrac{1}{2}(m_Z + m_M)\,\dot{\vec{r}}^{\,2} + G\frac{M(m_Z + m_M)}{r} + \tfrac{1}{2}\,\mu\,\dot{\vec{R}}^{\,2} + G\frac{m_Z m_M}{R} + G\frac{M\mu}{2\,r^3}\left[\frac{3}{r^2}\,(\vec{r}\cdot\vec{R})^2 - R^2\right], \quad (1)$$

kde $\vec{r}$ je poloha těžiště soustavy Země-Měsíc vůči Slunci, $\vec{R}$ je poloha Země vůči Měsíci, M, m_Z a m_M jsou hmotnosti Slunce, Země a Měsíce, přičemž μ je redukovaná hmotnost posledně jmenovaných.

1. Vyjděte z Lagrangeovy funkce vyjádřené pomocí vektorů polohy Země vůči Slunci $\vec{r}_Z$ a Měsíce vůči Slunci $\vec{r}_M$. Nezapomeňte zahrnout vzájemné gravitační působení všech tří těles.

2. Proveďte transformaci k novým souřadnicím adaptovaným na těžiště soustavy Země-Měsíc
$$\vec{r} = \frac{m_Z\,\vec{r}_Z + m_M\,\vec{r}_M}{m_Z + m_M}, \qquad \vec{R} = \vec{r}_Z - \vec{r}_M\,.$$

3. Inverzí těchto vztahů vyjádřete funkce r_Z^{-1} a r_M^{-1}. Jejich Taylorovým rozvojem v mocninách r^{-1} odvoďte, že platí
$$\frac{m_Z}{r_Z} + \frac{m_M}{r_M} = \frac{m_Z + m_M}{r} + \frac{\mu}{2\,r^3}\left[\frac{3}{r^2}\,(\vec{r}\cdot\vec{R})^2 - R^2\right] + \cdots\,.$$

4. Dosazením konkrétních fyzikálních hodnot zjistěte poměr maximální velikosti posledního členu v Lagrangeově funkci (1) k druhému resp. čtvrtému členu (použijte střední hodnoty vzdáleností $r = 1,5\cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$ a $R = 3,9\cdot 10^{8}\,\mathrm{m}$). Tím dokážete, že ho lze chápat jako malou perturbaci předchozích čtyř členů, které formálně odpovídají dvěma nezávislým Keplerovým úlohám.

5. Předpokládejte nyní, že dráha Měsíce vůči Zemi je přesně kruhová, leží v rovině ekliptiky a že úhel mezi vektory $\vec{r}$ a $\vec{R}$ je ϕ. Ukažte, že efektivní hodnota potenciálového členu $V(r)$ v Lagrangeově funkci (1) vystředovaná přes celý jeden oběh, tedy $\phi \in [0, 2\pi)$, je
$$V(r) = -\frac{\alpha}{r} - \frac{\varepsilon}{r^3}, \quad \text{kde} \quad \alpha = GM(m_Z + m_M)\,, \quad \varepsilon = \tfrac{1}{4}GM\mu R^2\,.$$

J. Podolský, ÚTF, 15. 11. 2017