Příklad z teoretické mechaniky č. 3 (2025)

Lagrangeova funkce relativistické částice klidové hmotnosti m_0 a náboje e, která se v obecném elektromagnetickém poli pohybuje rychlostí $\mathbf{v} = \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}$, má tvar

$$L = -m_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - e\big(\varphi - \mathbf{v}\cdot\mathbf{A}\big), \tag{1}$$

kde $v^2 = \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$ a $\varphi(\mathbf{r}, t)$ resp. $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ jsou skalární resp. vektorový potenciál.

1. Najděte a diskutujte klasickou limitu L pro malé rychlosti $v \ll c$.
2. Ukažte, že Hamiltonova funkce odpovídající (1) je

   $$H = \sqrt{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2\, c^2 + m_0^2 c^4} + e\,\varphi\,,$$

   kde $\mathbf{p}$ jsou kanonické hybnosti sdružené s $\mathbf{r}$. K vyjádření rychlosti $\mathbf{v}$ použijte vztah

   $$(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2 = \frac{m_0^2\, v^2}{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}\,,$$

   který je kvadrátem výrazů definujících kanonické hybnosti.
3. Odvoďte příslušné Hamiltonovy kanonické rovnice.
4. Ukažte, že z těchto Hamiltonových rovnic plyne relativistická pohybová rovnice

   $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m_0\,\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\right) = e\big(\,\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}\,\big)\,.$$

Doporučení: Všechny výpočty provádějte explicitně v kartézských souřadnicích.

J. Podolský, ÚTF, 26. 11. 2025