

Příklad z teoretické mechaniky č. 3 (2018)

Cílem úlohy je dokázat tzv. *Larmorův teorém*, a to pomocí Lagrangeova i Hamiltonova formalismu.

1. Odvoďte, že Lagrangeova funkce částice hmotnosti m a náboje e , která se pohybuje v osově symetrickém potenciálu V a v homogenním magnetickém poli B orientovaném podél osy z , má ve válcových souřadnicích tvar

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}eB r^2\dot{\varphi} - V(r, z). \quad (1)$$

Nápověda: Nejprve ověřte, že kartézské složky příslušného vektorového potenciálu jsou $A_x = -\frac{1}{2}B y$, $A_y = \frac{1}{2}B x$, $A_z = 0$. Pak proveďte transformaci do válcových souřadnic.

2. Z (1) dokažte, že $mr^2(\dot{\varphi} + \omega) = konst$, kde

$$\omega = \frac{eB}{2m} \quad (2)$$

je *Larmorova frekvence*.

3. Funkci (1) nyní přetransformujte do souřadného systému, který se otáčí konstantní úhlovou rychlostí ω kolem osy z , neboli $\bar{r} = r$, $\bar{z} = z$, $\bar{\varphi} = \varphi + \omega t$. Ukažte, že pokud je magnetické pole slabé ($|\omega| \ll |\dot{\varphi}|$), je jeho vliv v rotující soustavě eliminován. Tím je dokázán Larmorův teorém, podle kterého nabitá částice ve slabém magnetickém poli vykonává otáčivý precesní pohyb s úhlovou rychlostí ω určenou vztahem (2).
4. Alternativní důkaz proveďte nyní pomocí Hamiltonova formalismu. Uvažte obvyklou Lagrangeovu funkci částice v potenciálu, tedy $L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, a přetransformujte ji do soustavy rotující úhlovou rychlostí ω pomocí standardních vztahů

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x \cos \omega t - y \sin \omega t, \\ \bar{y} &= x \sin \omega t + y \cos \omega t, \\ \bar{z} &= z. \end{aligned} \quad (3)$$

5. Poté spočítejte odpovídající Hamiltonovu funkci

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \omega(y p_x - x p_y) + V(x, y, z). \quad (4)$$

6. Srovnáním výrazu (4) se standardní Hamiltonovou funkcí pro částici v obecném elektromagnetickém poli ukažte, že druhý člen přesně odpovídá interakci s homogenním magnetickým polem orientovaným podél kartézské osy z , pokud je člen obsahující B^2 zanedbatelný vůči V (příslušnou podmínku explicitně napište).