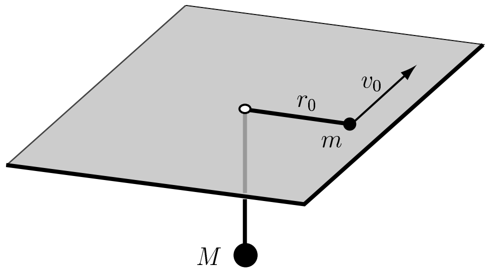
Příklad z teoretické mechaniky č. 3 (2016)

Malým otvorem ve vodorovné hladké desce prochází napnutá (nehmotná) nit délky l. Na jejím horním konci je upevněn hmotný bod m, na druhém konci pod deskou hmotný bod M. Celá soustava se nachází v homogenním gravitačním poli g. V čase $t = 0$ je bod M v klidu, zatímco bod m se nachází ve vzdálenosti $r_0 < l$ od otvoru a má rychlost v_0 v rovině desky, kolmou na nit.



1. Určete Lagrangeovu funkci, když polohu bodu m popíšeme polárními souřadnicemi r, φ.
2. Spočítejte příslušnou Hamiltonovu funkci a pomocí ní pak sestavte Hamiltonovy kanonické rovnice úlohy.
3. Nalezněte dva integrály pohybu a vyjádřete jejich konstantní hodnoty pomocí počátečních podmínek.
4. Užitím obou integrálů pohybu dokažte, že pro závaží M existují body obratu $\dot{r} = 0$, tj. nejnižší a nejvyšší poloha, které jsou dány rovnicí
$$(r - r_0)(Mg\,r^2 - \tfrac{1}{2}mv_0^2\,r - \tfrac{1}{2}mv_0^2 r_0) = 0\,.$$
5. Diskutujte charakter pohybu soustavy v závislosti na velikosti počáteční rychlosti v_0.

J. Podolský, ÚTF, 30. 11. 2016