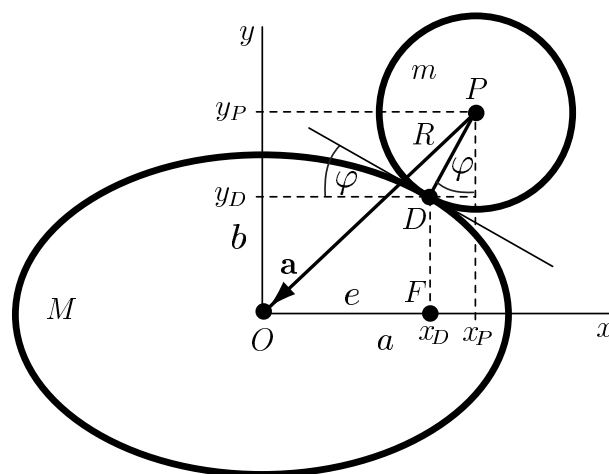


## Příklad z teoretické mechaniky č. 4 (2016)

V letošním roce skončila velmi úspěšná mise evropské sondy Rosetta s výsadkovým modulem Philae, jejichž úkolem byl podrobný průzkum komety 67P, viz obrázek.



Překvapením byl už samotný tvar komety připomínající dětskou kachničku s oválným tělem a kulatou hlavičkou. Úkolem je spočítat tenzor setrvačnosti komety. Uvažujme jednoduchý model, kdy „tělo“ tvoří homogenní rotační elipsoid hmotnosti  $M$  s delší poloosou  $a$  a vedlejšími poloosami  $b = c$ , zatímto „hlavičku“ tvoří homogenní koule hmotnosti  $m$  a poloměru  $R$ . Obě části nechtě se dotýkají v jediném bodě  $D$ , který leží právě nad ohniskem  $F$  elipsoidu:



1. Nejprve dokažte, že tenzor setrvačnosti obecného elipsoidu hmotnosti  $M$  s poloosami  $a, b, c$  vůči hlavním osám (procházejí středem a jsou kolmé na roviny symetrie) má tvar

$$I_{ij} = \frac{1}{5}M \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + c^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 + b^2 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Návod: Užijte elipsoidální souřadnice  $x = ar \sin \theta \cos \phi$ ,  $y = br \sin \theta \sin \phi$ ,  $z = c + r \cos \theta$ , kde  $r \in [0, 1]$ ,  $\theta \in [0, \pi]$ ,  $\phi \in [0, 2\pi)$ , takže element objemu je  $dV = abc r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$ . Příslušný integrál spočítejte vůči jedné hlavní ose a pak užijte symetrie  $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$ .

2. Pomocí obecného výrazu (1) nalezněte zvlášť (jako dva speciální případy) tenzor setrvačnosti „těla“ a tenzor setrvačnosti sférické „hlavičky“. Tím dostanete tenzory setrvačnosti obou částí vyjádřené vůči jejich geometrickým středům.

pokračování na další straně

3. Nyní musíte vyjádřit tenzor setrvačnosti „hlavičky“ vůči vztažné soustavě hlavních os „těla“, a to užitím zobecněné Steinerovy věty (viz učební text)

$$I_{ij} = I_{ij}^0 + (\delta_{ij} a_k a_k - a_i a_j) m, \quad (2)$$

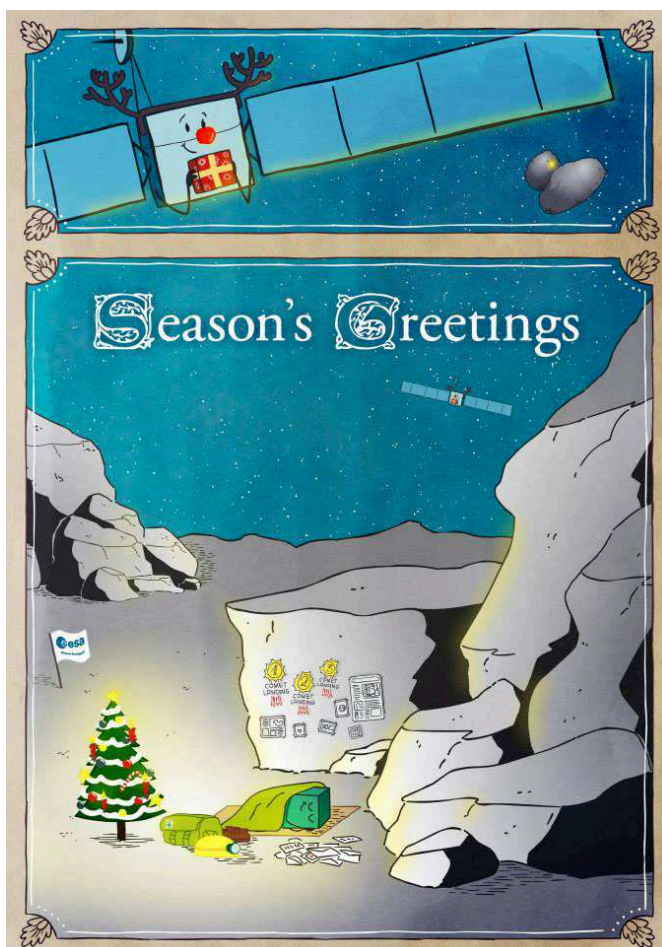
kde  $I_{ij}^0$  jsou složky vůči těžišti koule (jejímu středu  $P$ ) určené v bodě 2. a  $a_i$  jsou složky vektoru posunutí  $\mathbf{a}$  ze středu  $P$  „hlavičky“ do středu  $O$  „těla“. V daném případě to znamená, že  $\mathbf{a} = (-x_P, -y_P, 0)$ , kde  $x_P, y_P$  je poloha bodu  $P$ .

4. Sečtením obou tenzorů setrvačnosti „těla“ i „hlavičky“ (nyní již vyjádřených ve stejné soustavě hlavních os „těla“) dostanete celkový tenzor setrvačnosti  $I_{ij}$  modelu komety 67P. Napište všechny jeho složky pomocí parametrů  $M, m, a, b, R, x_P, y_P$ .
5. Nakonec vyjádřete geometrické parametry posunutí  $x_P, y_P$  pomocí rozměrů těles  $a, R$  a excentricity elipsoidu „těla“  $e = \sqrt{a^2 - b^2}$ .

Návod: Polohu  $x_D, y_D$  bodu dotyku  $D$  zjistíte z funkce  $y(x) = b\sqrt{1 - x^2/a^2}$  pro  $x = e$ . Úhel  $\varphi$  směrnice tečny v bodě dotyku  $D$  zjistíte z derivace této funkce  $|y'(x)| = \tan \varphi$ . Z toho odvoďte že

$$\sin \varphi = \frac{e}{\sqrt{a^2 + e^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + e^2}}. \quad (3)$$

Parametry posunutí  $x_P, y_P$  pak již snadno získáte užitím  $x_D, y_D$  a vztahů (3) spolu s  $R$ .



Více informací a kredit obrázků: <http://rosetta.esa.int/>

J.Podolský, ÚTF, 21. 12. 2016