

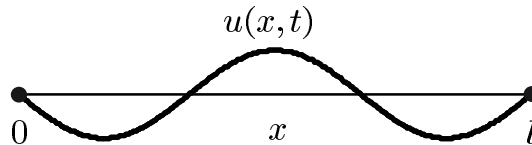
Příklad z teoretické mechaniky č. 4 (2018)

Cílem úlohy je seznámit se s *Bernoulliovou–Fourierovou metodou* řešení rovnice struny.

1. Kmity struny (jednorozměrného spojitého útvaru konstantní lineární hustoty ρ , v němž působí vnitřní síly napětí σ) jsou dány řešení *rovnice struny*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (1)$$

kde funkce $u(x, t)$ popisuje malou příčnou výchylku v místě x v čase t , přičemž $c = \sqrt{\sigma/\rho}$ je rychlost šíření vlny. Projděte si fyzikální odvození této rovnice ve studijním textu.



2. Uvažujme, že *oba konce struny* klidové délky l jsou *upevněny* na ose x v bodech 0 a l , tedy že máme *okrajové podmínky*

$$u(0, t) = 0, \quad (2)$$

$$u(l, t) = 0. \quad (3)$$

Řešení (1) se hledá v *separovaném tvaru* $u(x, t) = X(x)T(t)$. Dosazením dostaneme

$$c^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = -\omega^2, \quad (4)$$

kde čárka značí derivaci podle x a tečka derivaci podle t . Vztah vyjadřuje rovnost mezi dvěma funkcemi *různých proměnných*, jež má být splněna pro *všechny* hodnoty x a t . To nastává jen tehdy, rovnají-li se *obě strany* téže *separační konstantě* $-\omega^2$. Vztah (4) proto představuje dvě *obyčejné* lineární diferenciální rovnice pro $X(x)$ a $T(t)$.

Ukažte, že pro nulové nebo ryze imaginární ω příslušné funkce $X(x)$ řešící (4) nesplňují obě okrajové podmínky (2), (3), zatímco pro *reálné* ω má každé řešení tvar

$$X(x) = C_1 \cos\left(\frac{\omega_n}{c}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\omega_n}{c}x\right),$$

kde

$$C_1 = 0, \quad \omega_n = n\pi \frac{c}{l}, \quad \text{kde } n = 1, 2, 3, \dots$$

3. Obecné řešení rovnice (4) pro $T(t)$ nyní je $T(t) = A \cos(\omega_n t) + B \sin(\omega_n t)$, a protože rovnice (1) je lineární, řeší ji i každá superpozice partikulárních řešení pro všechna n . Řešení rovnice struny tedy má tvar

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(n\pi \frac{x}{l}\right) \left[a_n \cos\left(n\pi \frac{ct}{l}\right) + b_n \sin\left(n\pi \frac{ct}{l}\right) \right], \quad (5)$$

kde a_n, b_n jsou konstanty. Ty lze určit z *počátečních podmínek*, tedy ze zadaných hodnot funkce $u(x, 0)$ a z její časové derivace $\dot{u}(x, 0)$ v počátečním čase $t = 0$:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0(x) && \text{počáteční výchylka struny,} \\ \dot{u}(x, 0) &= v_0(x) && \text{rychlost vypuštění struny.} \end{aligned} \quad (6)$$

Ukažte, že tedy musíme splnit podmínky

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(n\pi\frac{x}{l}\right) = u_0(x), \quad (7)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n n\pi\frac{c}{l} \sin\left(n\pi\frac{x}{l}\right) = v_0(x). \quad (8)$$

4. Z teorie Fourierových řad plyne, že koeficienty a_n, b_n v (5) jsou explicitně určeny vztahy

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l u_0(x) \sin\left(n\pi\frac{x}{l}\right) dx, \quad (9)$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi c} \int_0^l v_0(x) \sin\left(n\pi\frac{x}{l}\right) dx. \quad (10)$$

Dokažte to. K tomu nejprve spočítejte užitečný integrál pro $m, n = 1, 2, 3, \dots$

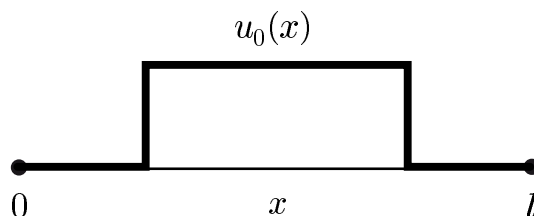
$$\int_0^l \sin\left(m\pi\frac{x}{l}\right) \sin\left(n\pi\frac{x}{l}\right) dx = \frac{l}{2} \delta_{mn}, \quad (11)$$

a to pomocí identity $\sin\left(m\pi\frac{x}{l}\right) \sin\left(n\pi\frac{x}{l}\right) = \frac{1}{2} \cos\left((m-n)\pi\frac{x}{l}\right) - \frac{1}{2} \cos\left((m+n)\pi\frac{x}{l}\right)$. Výrazy (9), (10) pro a_n, b_n pak získáte tím, že řady (7), (8) vynásobíte funkcí $\sin\left(m\pi\frac{x}{l}\right)$, vyintegrujete přes x a použijete vztah (11). Platí, že systém funkcí $\left\{\sin\left(n\pi\frac{x}{l}\right)\right\}$ tvoří úplný ortogonální systém funkcí s pevnými konci (2), (3) na intervalu $(0, l)$.

5. Tuto metodu řešení vlnové rovnice demonstруйте na konkrétním příkladu, kdy počáteční podmínky mají tvar

$$u_0(x) = 1 \quad \text{pro } x \in \left[\frac{1}{4}l, \frac{3}{4}l\right], \quad \text{všude jinde je } u_0(x) = 0,$$

$$v_0(x) = 0.$$



Spočítejte všechny integrály (9), (10) a explicitně napište příslušnou kompletní řadu (5).

6. Nakonec odvoďte vztahy analogické výrazům (5), (7), (8), (11), (9), (10) pro případ, kdy namísto (2), (3) jsou naopak *oba konce struny zcela volné*, což odpovídá okrajovým podmínkám

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = 0. \quad (13)$$