

Obecné souřadnice tenzorů

souřadnice: x^m

báze v prostoru vektorů: $\frac{\partial}{\partial x^m}$ báze v prostoru 1-form: $\mathbf{d}x^m$ platí: $\frac{\partial}{\partial x^m} \cdot \mathbf{d}x^n = \delta_m^n$

Souřadnice tenzorů:

souřadnice x^k

$$\mathbf{a} = a^k \frac{\partial}{\partial x^k} \quad \boldsymbol{\alpha} = \alpha_k \mathbf{d}x^k$$

$$\mathbf{A} = A_{l\dots}^{k\dots} \frac{\partial}{\partial x^k} \dots \mathbf{d}x^l \dots$$

$$a^k = a^{l'} \frac{\partial x^k}{\partial y^{l'}} \quad \alpha_k = \alpha_{l'} \frac{\partial y^{l'}}{\partial x^k}$$

$$A_{n\dots}^{m\dots} = A_{l'}^{k'} \frac{\partial x^m}{\partial y^{k'}} \dots \frac{\partial y^{l'}}{\partial x^n} \dots$$

souřadnice $y^{k'}$

$$\mathbf{a} = a^{k'} \frac{\partial}{\partial y^{k'}} \quad \boldsymbol{\alpha} = \alpha_{k'} \mathbf{d}y^{k'}$$

$$\mathbf{A} = A_{l'}^{k'\dots} \frac{\partial}{\partial y^{k'}} \dots \mathbf{d}y^{l'} \dots$$

$$a^{k'} = a^l \frac{\partial y^{k'}}{\partial x^l} \quad \alpha_{k'} = \alpha_l \frac{\partial x^l}{\partial y^{k'}}$$

$$A_{n'}^{m'\dots} = A_l^k \frac{\partial y^{m'}}{\partial x^k} \dots \frac{\partial x^l}{\partial y^{n'}} \dots$$

Metrika, snižování a zvyšování indexů

metrika definuje skalární součin mezi vektory: $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{q} \cdot \mathbf{b}$

$$\mathbf{q} = q_{mn} \mathbf{d}x^m \mathbf{d}x^n \quad q_{kn} q^{ln} = \delta_k^l \quad q_{kl} = q_{lk} \quad q^{kl} = q^{lk}$$

metrika definuje korespondenci mezi vektory a 1-formami

$$a_k = q_{kl} a^l \quad a^k = q^{kl} a_l$$

Levi-Civitův tenzor

Levi-Civitův tenzor ϵ je totálně antisymetrický tenzor se zvolenou orientací, normalizovaný na metriku

$$\epsilon \in V_d^0 \quad \text{kde } d = \dim V$$

$$\epsilon = \mathcal{A}(\epsilon) \quad \text{tj. } \epsilon_{k_1\dots k_d} = \epsilon_{[k_1\dots k_d]}$$

$$\epsilon_{k_1\dots k_d} \epsilon_{k_1\dots k_d} q^{k_1 l_1} \dots q^{k_d l_d} = \pm d!$$

$$\epsilon_{1\dots d} > 0 \quad \text{v pozitivně orientované bázi}$$

$$\Rightarrow \epsilon_{1\dots d} = \pm \sqrt{|\det q_{kl}|}$$

antisymetrie

normalizace

orientace

∇ -operátor – kovariantní derivace

pro lineární souřadnice $\bar{x}^{\bar{k}}$ v afinním prostoru platí: $\nabla \frac{\partial}{\partial \bar{x}^{\bar{k}}} = 0 \quad \nabla \mathbf{d}\bar{x}^{\bar{k}} = 0$

v obecných souřadnicích x^k definujeme Γ_{kl}^n : $\nabla \frac{\partial}{\partial x^k} = \Gamma_{mk}^n \frac{\partial}{\partial x^n} \mathbf{d}x^m \quad \nabla \mathbf{d}x^k = -\Gamma_{mn}^k \mathbf{d}x^m \mathbf{d}x^n$

metrika je konstatní tenzor: $\nabla \mathbf{q} = 0$

souřadnice kovariantní derivace

$A_{l;m}^k$ označuje souřadnice tenzoru $\nabla \mathbf{A}$, $A_{l,m}^k$ označuje parciální derivace podle x^m

$$f_{;k} = f_{,k} \quad a^k{}_{;m} = a^k{}_{,m} + \Gamma_{mn}^k a^n \quad a_{n;m} = a_{n,m} - \Gamma_{mn}^k a_k$$

$$A_{l\dots;m}^{k\dots} = A_{l\dots,m}^{k\dots} + \Gamma_{mn}^k A_{l\dots}^{n\dots} + \dots - \Gamma_{ml}^n A_{n\dots}^{k\dots} - \dots$$

$$\Gamma_{kl}^a = \frac{1}{2} q^{an} (q_{nk,l} + q_{nl,k} - q_{kl,n})$$

$$\Gamma_{kl}^a = \frac{\partial^2 \bar{x}^{\bar{n}}}{\partial x^k \partial x^l} \frac{\partial x^a}{\partial \bar{x}^{\bar{n}}}$$

$$\Gamma_{kl}^a = -\frac{\partial \bar{x}^{\bar{b}}}{\partial x^k} \frac{\partial^2 x^a}{\partial \bar{x}^{\bar{b}} \partial \bar{x}^{\bar{c}}} \frac{\partial \bar{x}^{\bar{c}}}{\partial x^l}$$

Ortogonalní souřadnice ($d = 3$)

ortogonalní souřadnice x^m mají na sebe kolmé souřadnicové čáry, tj. q_{kl} je diagonální v takovém případě zavádíme Lamého koeficienty: $h_k = \sqrt{q_{kk}}$
ve výrazech s Lamého koeficienty se nepoužívá sčítací konvence!

Normalizovaná báze vektorů a 1-forem

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{\hat{k}} &= \frac{1}{h_k} \frac{\partial}{\partial x^k} & |\mathbf{e}_{\hat{k}}| &= 1 & \left| \frac{\partial}{\partial x^k} \right| &= h_k \\ \mathbf{e}^{\hat{k}} &= h_k \mathbf{d}x^k & |\mathbf{e}^{\hat{k}}| &= 1 & |\mathbf{d}x^k| &= \frac{1}{h_k} \end{aligned}$$

Metrika a objemový element

$$\mathbf{q} = h_1^2 \mathbf{e}^{\hat{1}} \mathbf{e}^{\hat{1}} + h_2^2 \mathbf{e}^{\hat{2}} \mathbf{e}^{\hat{2}} + h_3^2 \mathbf{e}^{\hat{3}} \mathbf{e}^{\hat{3}} \quad dV = h_1 h_2 h_3 dx^1 dx^2 dx^3$$

Vztah souřadnic s různým typem indexů

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= a^n \frac{\partial}{\partial x^n} = a^{\hat{n}} \mathbf{e}_{\hat{n}} & \mathbf{a} &= a_n \mathbf{d}x^n = a_{\hat{n}} \mathbf{e}^{\hat{n}} \\ h_n a^n &= a^{\hat{n}} = a_{\hat{n}} = h_n^{-1} a_n & & \text{nesčítá se!} \end{aligned}$$

Levi-Civitův tenzor a vektorové násobení

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon} &= h_1 h_2 h_3 \mathbf{d}x^1 \wedge \mathbf{d}x^2 \wedge \mathbf{d}x^3 = \mathbf{e}^{\hat{1}} \wedge \mathbf{e}^{\hat{2}} \wedge \mathbf{e}^{\hat{3}} \\ \epsilon_{123} &= h_1 h_2 h_3 & \epsilon_{\hat{1}\hat{2}\hat{3}} &= 1 \end{aligned}$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \quad \Rightarrow$$

$$c^1 = \frac{h_2 h_3}{h_1} (a^2 b^3 - a^3 b^2) \quad c^{\hat{1}} = (a^{\hat{2}} b^{\hat{3}} - a^{\hat{3}} b^{\hat{2}}) \quad \text{a cyklické záměny}$$

Γ - koeficienty

$$\begin{aligned} \Gamma_{kn}^k &= \Gamma_{nk}^k = (\log h_k)_{,n} = h_k^{-1} h_{k,n} \\ \Gamma_{nn}^k &= -\frac{1}{2} h_k^{-2} (h_n^2)_{,k} & k &\neq n \\ \Gamma_{mn}^k &= 0 & k, m, n &\text{různé} \end{aligned}$$

Operátory v ortogonálních souřadnicích

gradient skaláru: $\mathbf{a} = \mathbf{d}f = \nabla f$

$$a_k = f_{,k} \quad a^{\hat{k}} = a_{\hat{k}} = \frac{1}{h_k} f_{,k} \quad a^k = \frac{1}{h_k^2} f_{,k}$$

divergence: $f = \nabla \cdot \mathbf{a}$

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left((h_1 h_2 h_3 a^1)_{,1} + (h_1 h_2 h_3 a^2)_{,2} + (h_1 h_2 h_3 a^3)_{,3} \right) \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left((h_2 h_3 a^{\hat{1}})_{,1} + (h_1 h_3 a^{\hat{2}})_{,2} + (h_1 h_2 a^{\hat{3}})_{,3} \right) \\ &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\left(\frac{h_2 h_3}{h_1} a_1 \right)_{,1} + \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} a_2 \right)_{,2} + \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} a_3 \right)_{,3} \right) \end{aligned}$$

rotace: $\mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{a}$

$$\begin{aligned} b^1 &= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left((h_3^2 a^3)_{,2} - (h_2^2 a^2)_{,3} \right) && \text{a cyklické záměny} \\ b^{\hat{1}} &= \frac{1}{h_2 h_3} \left((h_3 a^{\hat{3}})_{,2} - (h_2 a^{\hat{2}})_{,3} \right) && \text{a cyklické záměny} \\ b_1 &= \frac{h_1}{h_2 h_3} (a_{3,2} - a_{2,3}) && \text{a cyklické záměny} \end{aligned}$$

laplace:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left(\left(\frac{h_2 h_3}{h_1} f_{,1} \right)_{,1} + \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} f_{,2} \right)_{,2} + \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} f_{,3} \right)_{,3} \right)$$