

Definice a vlastnosti distribucí na \mathbb{R}

Definice

Distribuce jsou lineární spojité funkcionály na prostoru testovacích funkcí. Prostor distribucí \mathcal{D}' je tak duálem k prostoru testovacích funkcí \mathcal{D} .

$$T : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi \in \mathcal{D} \rightarrow \langle T, \varphi \rangle.$$

Intuitivně má působení distribuce T na testovací funkci φ význam

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} T(x)\varphi(x)dx.$$

Tímto vztahem jsou definovány tzv. regulární distribuce odpovídající lokálně integrovatelným funkcím. Máme tedy $\mathcal{L}_{\text{loc}}^1 \subset \mathcal{D}'$.

Prostor testovacích funkcí \mathcal{D} se může volit podle potřeby a jeho volba vymezuje velikost prostoru distribucí. Obvyklé volby jsou:

\mathcal{D}' – distribuce

\mathcal{D} prostor hladkých funkcí s kompaktním nosičem

\mathcal{D}' prostor distribucí s neomezeným růstem

$$\mathcal{D} = \{\varphi : \varphi \in \mathcal{C}^\infty \wedge \text{supp } \varphi \text{ je kompaktní}\}$$

$$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi \equiv \exists K \text{ kompaktní } \forall n \text{ supp } \varphi_n \subset K \quad \forall k \varphi_n^{[k]} \xrightarrow{K} \varphi$$

\mathcal{S}' – temperované distribuce

\mathcal{S} prostor rychle klesajících hladkých funkcí

\mathcal{S}' prostor distribucí s pomalým růstem, tzv. temperované distribuce

$$\mathcal{S} = \{\varphi : \varphi \in \mathcal{C}^\infty \wedge \forall m |x|^m \varphi(x) \text{ omezená}\}$$

$$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \varphi \equiv \forall k, m |x|^m \varphi_n^{[k]}(x) \xrightarrow{\mathbb{R}} \varphi$$

\mathcal{E}' – distribuce s kompaktním nosičem

\mathcal{E} prostor hladkých funkcí bez omezení na růst

\mathcal{E}' prostor distribucí s kompaktním nosičem

$$\mathcal{E} = \{\varphi : \varphi \in \mathcal{C}^\infty\}$$

$$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{E}} \varphi \equiv \forall K \text{ kompaktní } \forall k \varphi_n^{[k]} \xrightarrow{K} \varphi$$

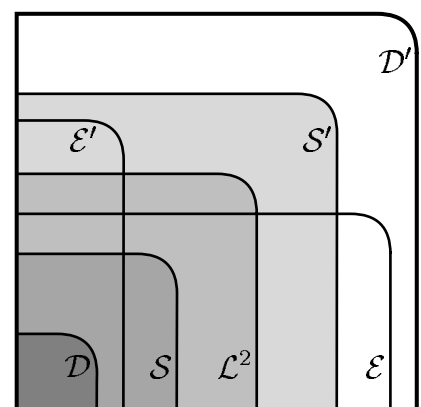
Poznamenejme, že prostor kvadraticky integrovatelných funkcí \mathcal{L}^2 tvoří Hilbertův prostor a lze proto ztotožnit se svým vlastním duálem, $\mathcal{L}^{2'} = \mathcal{L}^2$.

Tyto prostory jsou v následujícím vztahu:

$$\mathcal{D} \overset{\text{hustě}}{\subset} \mathcal{S} \overset{\text{hustě}}{\subset} \mathcal{E}, \quad \mathcal{E}' \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}',$$

$$\mathcal{D} \overset{\text{hustě}}{\subset} \mathcal{S} \overset{\text{hustě}}{\subset} \mathcal{L}^2 \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'.$$

Dále budeme hlavně uvažovat obecné distribuce z \mathcal{D}' . Prostor temperovaných distribucí \mathcal{S}' je důležitý v teorii Fourierovy transformace.



Vlastnosti

Rovnost distribucí na oblasti Ω :

$$T_1 \stackrel{\Omega}{=} T_2 \equiv \forall \varphi \in \mathcal{D} \text{ supp } \varphi \subset \Omega \Rightarrow \langle T_1, \varphi \rangle = \langle T_2, \varphi \rangle .$$

Nosič distribuce T :

$$\text{supp } T \equiv \mathbb{R} - \bigcup_{\Omega: T \stackrel{\Omega}{=} 0} \Omega .$$

Násobení distribuce T hladkou funkcí f :

$$\langle f T, \varphi \rangle \equiv \langle T, f \varphi \rangle .$$

Konvergence distribucí:

$$T_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} T \equiv \forall \varphi \in \mathcal{D} \quad \langle T_n, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle .$$

Derivace distribucí:

$$\langle T', \varphi \rangle \equiv -\langle T, \varphi' \rangle .$$

Platí

$$(T_1 + T_2)' = T_1' + T_2' , \quad (f T)' = f' T + f T' .$$

Derivace nehladké funkce

Funkci f hladká mimo bod $x = 0$ lze vyjádřit jako kombinace dvou hladkých funkcí f_- a f_+

$$f(x) = f_-(x)\theta(-x) + f_+(x)\theta(x) .$$

Označme $[f]$ skok v $x = 0$ a $f^{[l]}$ nedistribuční derivaci funkce f :

$$[f] = f_+(0) - f_-(0) , \quad f^{[l]}(x) = f'_-(x)\theta(-x) + f'_+(x)\theta(x) .$$

Pak pro distribuční derivace funkce f platí

$$f' = f^{[1]} + [f] \delta ,$$

$$f'' = f^{[2]} + [f] \delta' + [f^{[1]}] \delta ,$$

\vdots

$$f^{(n)} = f^{[n]} + [f] \delta^{(n-1)} + [f^{[1]}] \delta^{(n-2)} + \dots + [f^{[n-1]}] \delta .$$

Zde $\theta(x)$ a $\delta(x)$ jsou Heavisideova skoková funkce a Diracova δ -funkce – viz příklady distribucí.

Konvoluce

Operace konvoluce ‘ $*$ ’ lze za jistých podmínek definovat obecně pro dvě distribuce. Zde uvedeme pouze definici ve speciálních případech:

$$f, g \in \mathcal{S} \rightarrow f * g \in \mathcal{S} : \quad (f * g)(x) \equiv \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y)dy ,$$

$$T \in \mathcal{S}', f \in \mathcal{S} \rightarrow T * f : \quad \langle T * f, \varphi \rangle \equiv \langle T, f^- * \varphi \rangle , \quad \text{kde } f^-(x) = f(-x) .$$

Následující výrazy platí, pokud mají pro distribuce f, g, h smysl

$$(f * g) * h = f * (g * h) , \quad f * g = g * f ,$$

$$(f * g)' = f' * g = f * g' ,$$

$$\delta * f = f , \quad \delta' * f = f' .$$

Fourierova transformace

Definice

Fourierova transformace na prostoru rychle klesajících testovacích funkcí \mathcal{S} :

$$\begin{aligned}\mathcal{F} : \mathcal{S} &\rightarrow \mathcal{S}, & (\mathcal{F}\varphi)(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp(ikx) \varphi(x) dx, \\ \mathcal{F}^* : \mathcal{S} &\rightarrow \mathcal{S}, & (\mathcal{F}^*\varphi)(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp(-ikx) \varphi(x) dx.\end{aligned}$$

Fourierova transformace na prostoru temperovaných distribucí \mathcal{S}' :

$$\begin{aligned}\mathcal{F} : \mathcal{S}' &\rightarrow \mathcal{S}', & \langle \mathcal{F}T, \varphi \rangle &= \langle T, \mathcal{F}\varphi \rangle, \\ \mathcal{F}^* : \mathcal{S}' &\rightarrow \mathcal{S}', & \langle \mathcal{F}^*T, \varphi \rangle &= \langle T, \mathcal{F}^*\varphi \rangle.\end{aligned}$$

Formálně tyto vztahy vedou na stejné výrazy jako pro testovací funkce.

Vlastnosti

\mathcal{F} a \mathcal{F}^* jsou inverzní:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\mathcal{F}^* &= \mathcal{F}^*\mathcal{F} = \text{id}, \\ \mathcal{F}^*f &= \mathcal{F}f^- = (\mathcal{F}f)^-, \quad \text{kde } f^-(x) = f(-x).\end{aligned}$$

\mathcal{F} transformuje na sebe následující prostory:

$$\begin{aligned}\mathcal{F} : \mathcal{S}' &\rightarrow \mathcal{S}', & \mathcal{F} : \mathcal{L}^2 &\rightarrow \mathcal{L}^2, & \mathcal{F} : \mathcal{S} &\rightarrow \mathcal{S}, \\ \mathcal{F} : \mathcal{L}^q &\rightarrow \mathcal{L}^p & \text{pro } 1 < q \leq 2 & \text{ a } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \\ \mathcal{F} : \mathcal{L}^1 &\rightarrow \{\varphi : \varphi \in \mathcal{C}^\infty \wedge \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \varphi(x) = 0\}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T \in \mathcal{E}' &\Leftrightarrow (\mathcal{F}T)(k) \text{ je celá analytická funkce } \wedge \\ &\exists C, N, R \quad \forall k \quad |(\mathcal{F}T)(k)| \leq C(1 + |k|)^N \exp(R \text{Im } k), \\ \text{pak } (\mathcal{F}T)(k) &= \left\langle T, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(ikx) \right\rangle.\end{aligned}$$

Chování \mathcal{F} vůči derivaci:

$$\mathcal{F}T' = -ik\mathcal{F}T, \quad (\mathcal{F}T)' = \mathcal{F}(ixT).$$

Chování \mathcal{F} vůči konvoluci a součinu:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}(T * f) = (\mathcal{F}T)(\mathcal{F}f), \quad \sqrt{2\pi} \mathcal{F}(fT) = (\mathcal{F}T) * (\mathcal{F}f).$$

Příklady

$$\mathcal{F} \delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\mathcal{F} \delta(x - y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(i y k)$$

$$\mathcal{F} \delta'(x) = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} k$$

$$\mathcal{F} \delta^{[n]}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (-ik)^n$$

$$\mathcal{F} \exp\left(-\frac{1}{2} a x^2\right) = \frac{1}{\sqrt{a}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{k^2}{a}\right)$$

$$\mathcal{F} \exp(-a |x|) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2a}{a^2 + k^2}$$

$$\mathcal{F} \left(\theta(x) \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \exp(-ax) \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{a - ik} \right)^\alpha$$

$$\mathcal{F} \theta(x) = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{k + i0}$$

$$\mathcal{F} \theta(-x) = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{k - i0}$$

$$\mathcal{F} \text{sign}(x) = i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \mathcal{P} \frac{1}{k}$$

$$\mathcal{F} |x| = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \mathcal{R} \frac{1}{k^2}$$

$$\mathcal{F} \chi[\langle -a, a \rangle](x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(ak)}{k}$$

$$\mathcal{F} \log |x| = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \mathcal{R} \frac{1}{|k|} - \sqrt{2\pi} C \delta(k)$$

$$\mathcal{F} 1 = \sqrt{2\pi} \delta(k)$$

$$\mathcal{F} \exp(-i x l) = \sqrt{2\pi} \delta(k - l)$$

$$\mathcal{F} x = -i \sqrt{2\pi} \delta'(k)$$

$$\mathcal{F} x^n = \sqrt{2\pi} (-i)^n \delta^{[n]}(k)$$

$$\mathcal{F} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{x^2}{a}\right) = \sqrt{a} \exp\left(-\frac{1}{2} a k^2\right)$$

$$\mathcal{F} \frac{2a}{a^2 + x^2} = \sqrt{2\pi} \exp(-a |k|)$$

$$\mathcal{F} (a + ix)^{-\alpha} = \sqrt{2\pi} \theta(k) \frac{k^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \exp(-ak)$$

$$\mathcal{F} \frac{1}{x - i0} = i \sqrt{2\pi} \theta(k)$$

$$\mathcal{F} \frac{1}{x + i0} = -i \sqrt{2\pi} \theta(-k)$$

$$\mathcal{F} \left(\mathcal{P} \frac{1}{x} \right) = i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{sign}(k)$$

$$\mathcal{F} \left(\mathcal{R} \frac{1}{x^2} \right) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} |k|$$

$$\mathcal{F} \frac{\sin(ax)}{x} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \chi[\langle -a, a \rangle](k)$$

$$\mathcal{F} \left(\mathcal{R} \frac{1}{|x|} \right) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} (\log |k| + C)$$

kde C je Eulerova konstanta

Příklady distribucí

Heavisideova skoková funkce, charakteristická funkce a Diracova δ -funkce

Heavisideova skoková funkce $\theta(x)$ a charakteristická funkce $\chi[I](x)$

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in \mathbb{R}^- \\ 1 & \text{pro } x \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \quad \theta = \chi[\mathbb{R}^+] \quad \chi[I](x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in I \\ 0 & \text{pro } x \notin I \end{cases}$$
$$\langle \theta, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^+} \varphi(x) dx \quad \langle \chi[I], \varphi \rangle = \int_I \varphi(x) dx$$

Diracova funkce $\delta(x)$ a její derivace $\delta^{(n)}(x)$

$$\delta(x) = \theta'(x)$$
$$\langle \delta, \varphi \rangle = \varphi(0)$$
$$\langle \delta^{(n)}, \varphi \rangle = (-1)^n \varphi^{(n)}(0)$$

platí:

$$f(x)\delta(x) = f(0)\delta(x)$$
$$f(x)\delta'(x) = f(0)\delta'(x) - f'(0)\delta(x)$$
$$f(x)\delta''(x) = f(0)\delta''(x) - 2f'(0)\delta'(x) + f''(0)\delta(x)$$

δ -funkce složená s hladkou funkcí f dává:

$$\delta(f(x)) = \sum_{x_o: f(x_o)=0} |f'(x_o)|^{-1} \delta(x - x_o)$$

δ -funkce a její derivace jsou homogenní vůči přeškálování argumentu:

$$\delta(ax) = a^{-1} \delta(x) \quad \delta^{(n)}(ax) = a^{-n-1} \delta^{(n)}(x) \quad a \in \mathbb{R}^+$$

δ -funkce je obecné řešení rovnice $xT = 0$:

$$xT = 0 \quad \Leftrightarrow \quad T = c\delta, \quad c \in \mathbb{R}$$

Distribuční logaritmus

$\log|x|$ – logaritmus absolutní hodnoty

$\log|x|$ je lokálně integrovatelná funkce

$$\langle \log|x|, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \log|x| \varphi(x) dx$$

$\log(x \pm i0)$ – logaritmus analyticky prodloužený na \mathbb{R}^-

$\log(x \pm i0) = \log|x| \pm i\pi \theta(-x)$ integrování nad/pod řezem na \mathbb{R}^-

$$\langle \log(x \pm i0), \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \log|x| \varphi(x) dx \pm i\pi \int_{\mathbb{R}^-} \varphi(x) dx$$

Distribuční $\frac{1}{x}$

Hlavní hodnota $\mathcal{P}\frac{1}{x}$

$$\mathcal{P}\frac{1}{x} = (\log|x|)' = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\theta(-x - \varepsilon) + \theta(x - \varepsilon)}{x}$$

$$\langle \mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R} \setminus \langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle} \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

$\frac{1}{x \pm i0}$ – analytické prodloužení pod/nad pólem

$$\frac{1}{x \pm i0} = (\log(x \pm i0))' = \mathcal{P}\frac{1}{x} \mp i\pi \delta(x)$$

$$\langle \frac{1}{x \pm i0}, \varphi \rangle = \mp i\pi \varphi(0) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R} \setminus \langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle} \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

$\mathcal{R}\frac{\theta(\pm x)}{x}$ – regularizace na \mathbb{R}^\pm

$$\mathcal{R}\frac{\theta(\pm x)}{x} = (\theta(\pm x) \log|x|)' = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{\theta(\pm x - \varepsilon)}{x} + (\log \varepsilon) \delta(x) \right)$$

$$\langle \mathcal{R}\frac{\theta(\pm x)}{x}, \varphi \rangle = \pm \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{\pm\varepsilon}^{\pm\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx + (\log \varepsilon) \varphi(0) \right)$$

$\mathcal{R}\frac{1}{|x|}$ – regularizace převrácené absolutní hodnoty

$$\mathcal{R}\frac{1}{|x|} = (\text{sign}(x) \log|x|)' = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{\theta(-x - \varepsilon) + \theta(x - \varepsilon)}{|x|} + 2(\log \varepsilon) \delta(x) \right)$$

$$\langle \mathcal{R}\frac{1}{|x|}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{\mathbb{R} \setminus \langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle} \frac{\varphi(x)}{|x|} dx + 2(\log \varepsilon) \varphi(0) \right)$$

Vztahy mezi různými distribučními tvary $1/x$ jsou:

$$\frac{1}{x + i0} = \mathcal{P}\frac{1}{x} - i\pi\delta(x) \qquad \mathcal{P}\frac{1}{x} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x + i0} + \frac{1}{x - i0} \right)$$

$$\frac{1}{x - i0} = \mathcal{P}\frac{1}{x} + i\pi\delta(x) \qquad \delta(x) = \frac{i}{2\pi} \left(\frac{1}{x + i0} - \frac{1}{x - i0} \right)$$

$$\mathcal{R}\frac{\theta(x)}{x} = \frac{1}{2} \left(\mathcal{P}\frac{1}{x} + \mathcal{R}\frac{1}{|x|} \right) \qquad \mathcal{P}\frac{1}{x} = \mathcal{R}\frac{\theta(-x)}{x} + \mathcal{R}\frac{\theta(x)}{x}$$

$$\mathcal{R}\frac{\theta(-x)}{x} = \frac{1}{2} \left(\mathcal{P}\frac{1}{x} - \mathcal{R}\frac{1}{|x|} \right) \qquad \mathcal{R}\frac{1}{|x|} = -\mathcal{R}\frac{\theta(-x)}{x} + \mathcal{R}\frac{\theta(x)}{x}$$

Distribuce $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ a $\frac{1}{x \pm i0}$ jsou homogenní vůči přeškálování argumentu:

$$\mathcal{P}\frac{1}{ax} = \frac{1}{a} \mathcal{P}\frac{1}{x}, \quad \frac{1}{ax \pm i0} = \frac{1}{a} \frac{1}{x \pm i0}, \quad a \in \mathbb{R}^+,$$

Distribuce $\mathcal{R}\frac{\theta(\pm x)}{x}$ a $\mathcal{R}\frac{1}{|x|}$ homogenní nejsou:

$$\mathcal{R}\frac{\theta(\pm x)}{ax} = \frac{1}{a} \mathcal{R}\frac{\theta(\pm x)}{x} \pm \frac{\log a}{a} \delta(x), \quad \mathcal{R}\frac{1}{|ax|} = \frac{1}{a} \mathcal{R}\frac{1}{|x|} + \frac{2 \log a}{a} \delta(x), \quad a \in \mathbb{R}^+.$$

Distribuční zobecnění $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ a $\frac{1}{x \pm i0}$ funkce $\frac{1}{x}$ splňují rovnici $xT = 1$:

$$xT = 1 \quad \Leftrightarrow \quad T = \mathcal{P}\frac{1}{x} + c\delta, \quad c \text{ konstanta}.$$

Distribuční $\frac{1}{x^2}$

Regularizace $\mathcal{R}\frac{1}{x^2}$

$$\mathcal{R}\frac{1}{x^2} = -\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}\right)' = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(\frac{\theta(-x-\varepsilon) + \theta(x-\varepsilon)}{x^2} - \frac{2}{\varepsilon} \delta(x) \right)$$

$$\left\langle \mathcal{R}\frac{1}{x^2}, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(\int_{\mathbb{R} \setminus \langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - \frac{2}{\varepsilon} \varphi(0) \right)$$

$\mathcal{R}\frac{\theta(\pm x)}{x^2}$ – regularizace na \mathbb{R}^\pm

$$\mathcal{R}\frac{\theta(\pm x)}{x^2} = -\left(\mathcal{R}\frac{\theta(\pm x)}{x}\right)' = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(\frac{\theta(\pm x - \varepsilon)}{x} - \frac{1}{\varepsilon} \delta(x) \pm (1 - \log \varepsilon) \delta'(x) \right)$$

$$\left\langle \mathcal{R}\frac{\theta(\pm x)}{x^2}, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(\pm \int_{\pm\varepsilon}^{\pm\infty} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - \frac{1}{\varepsilon} \varphi(0) \pm (\log \varepsilon - 1) \varphi'(0) \right)$$

$\mathcal{R}\frac{\text{sign}(x)}{x^2}$

$$\mathcal{R}\frac{\text{sign}(x)}{x^2} = -\left(\mathcal{R}\frac{1}{|x|}\right)' = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(\frac{-\theta(-x-\varepsilon) + \theta(x-\varepsilon)}{x^2} + 2(1 - \log \varepsilon) \delta'(x) \right)$$

$$\left\langle \mathcal{R}\frac{\text{sign}(x)}{x^2}, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(\int_{\mathbb{R} \setminus \langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle} \text{sign}(x) \frac{\varphi(x)}{x^2} dx + 2(\log \varepsilon - 1) \varphi'(0) \right)$$

Vztahy mezi různými distribučními tvary $1/x^2$ jsou:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}\frac{\theta(x)}{x^2} &= \frac{1}{2} \left(\mathcal{R}\frac{1}{x^2} + \mathcal{R}\frac{\text{sign}(x)}{x^2} \right) & \mathcal{R}\frac{1}{x^2} &= \mathcal{R}\frac{\theta(-x)}{x^2} + \mathcal{R}\frac{\theta(x)}{x^2} \\ \mathcal{R}\frac{\theta(-x)}{x^2} &= \frac{1}{2} \left(\mathcal{R}\frac{1}{x^2} - \mathcal{R}\frac{\text{sign}(x)}{x^2} \right) & \mathcal{R}\frac{\text{sign}(x)}{x^2} &= -\mathcal{R}\frac{\theta(-x)}{x^2} + \mathcal{R}\frac{\theta(x)}{x^2} \end{aligned}$$

Na rozdíl od $\mathcal{R}\frac{1}{x^2}$, distribuce $\mathcal{R}\frac{\theta(\pm x)}{x^2}$ a $\mathcal{R}\frac{\text{sign}(x)}{x^2}$ nejsou homogenní:

$$\mathcal{R}\frac{\theta(\pm x)}{(ax)^2} = \frac{1}{a^2} \mathcal{R}\frac{\theta(\pm x)}{x^2} \mp \frac{1}{a^2} \log a \delta'(x), \quad \mathcal{R}\frac{\text{sign}(x)}{(ax)^2} = \frac{1}{a^2} \mathcal{R}\frac{\text{sign}(x)}{x^2} - \frac{2}{a^2} \log a \delta'(x).$$

Obecné řešení rovnice $x^2 T = 1$ má tvar

$$x^2 T = 1 \quad \Leftrightarrow \quad T = \mathcal{R}\frac{1}{x^2} + a \delta + b \delta', \quad a, b \text{ konstanty.}$$

Distribuční limity

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x} &= \pi \delta(x) & \lim_{a \rightarrow 0} \mathcal{P}\frac{\cos(ax)}{x} &= 0 \\ \lim_{a \rightarrow 0} \frac{a}{x^2 + a^2} &= \pi \delta(x) & \lim_{a \rightarrow 0} \frac{x}{x^2 + a^2} &= \mathcal{P}\frac{1}{x} \end{aligned}$$