Proseminář teoretické fyziky
TMF029
prof. Pavel Krtouš, Ph.D.
LS: 0/2 Z – jaro 2018

Zápočtové problémy

Vypracování zápočtového problému je podmínkou k udělení zápočtu. Řešení bude hodnoceno buď jako *správné* nebo jako *neúplné*. Neúplná řešení budou vrácena k dopracování.

Zadání zápočtových problémů je možné nalézt na WWW na adrese:

`http://utf.mff.cuni.cz/vyuka/TMF029/`

Problém 1

Povinná část

a) Ukažte, že souřadnice $\eta \in (-\eta_*, \eta_*)$, $\psi \in (-\pi, \pi)$ dané následujícími vztahy ke kartézským souřadnicím x, y:

$$x = \ell\, \frac{\sinh\eta}{\cosh\eta + \cos\psi}\sqrt{1 + 2\mu\cos\psi}\;, \quad y = \ell\, \frac{\sin\psi}{\cosh\eta + \cos\psi}\sqrt{1 - 2\mu\cosh\eta}\;,$$

(kde ℓ je konstanta rozměru délky a $2\mu = 1/\cosh\eta_*$ bezrozměrná konstanta) jsou ortogonální souřadnice. Ukažte, že Lamého koeficienty lze napsat ve tvaru

$$h^2_{(\eta)} = \ell^2 \frac{f_\mu(\eta,\psi)}{1 - 2\mu\cosh\eta}\;, \qquad h^2_{(\psi)} = \ell^2 \frac{f_\mu(\eta,\psi)}{1 + 2\mu\cos\psi}\;.$$

Nalezněte funkci $f_\mu(\eta,\psi)$.

b) Nakreslete souřadnicové čáry. Proveďte diskuzi chování souřadnic pro hodnoty $\eta = 0, \pm\eta_*$, $\psi \in (-\pi, \pi)$ a $\psi = 0, \pm\pi$, $\eta \in (-\eta_*, \eta_*)$.

c) Ukažte, že pro $\mu = 0$ přejdou tyto souřadnice na bi-sférické souřadnice, jejichž souřadnicové čáry jsou kružnice.

Nepovinná část pro zájemce

Přejmenováním souřadnic $x \to z$, $y \to \rho$ a rotací kolem osy z (v euklidovském prostoru s kartézskými souřadnicemi x, y, z, kde $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$) dostaneme deformované bi-sférické souřadnice. Obdobně přejmenováním $x \to \rho$, $y \to z$ a rotací kolem osy z dostaneme deformované toroidální souřadnice.

Rozmyslete si, že se jedná opět o ortogonální souřadnice, které v případě $\mu = 0$ přecházejí na standardní bi-sférické a toroidální souřadnice. Technicky: zkuste nalézt metriku a nakreslit si tvar souřadnicových ploch.

Problém 2

Mějme diferenciální operátor

$$D = A^{ij}(x)\nabla_i\nabla_j + B^i(x)\nabla_i + C(x)\ .$$

definovaný v euklidovském prostoru se standardní derivací ∇_i.

Nalezněte podmínky na koeficienty A^{ij}, B^i a C zaručující, že operátor D je symetrický

$$D = D^T\ .$$

Takovýto symetrický operátor přepište tak, aby člen s nejvyššími derivacemi měl tvar

$$\nabla_i A^{ij}(x)\nabla_j\ .$$

Poznámka: Předpokládejte, že operátor působí na funkcích s dostatečně rychlým poklesem v nekonečnu, díky čemuž můžete při transpozici ignorovat příspěvky z “okraje” zkoumané oblasti.