

Teoretická mechanika v jazyce diferenciální geometrie

Jiří Podolský

Studijní text k prosemináři TMF069
„Proseminář teoretické fyziky I“

Ústav teoretické fyziky
Matematicko-fyzikální fakulta
Univerzita Karlova v Praze

prosinec 2006

elektronická sazba: František Štrupl a Robert Švarc

© Jiří Podolský

Obsah

1	Základy diferenciální geometrie	4
1.1	Variety a základní objekty na nich	4
1.1.1	Pojem variety	4
1.1.2	Funkce na varietě	7
1.1.3	Křivky na varietě	8
1.1.4	Vektory na varietě	8
1.1.5	Formy na varietě	10
1.2	Tečný bandl, kotečný bandl	12
1.3	Fíbrovaný prostor	13
1.4	Vektorové pole a jeho integrální křivky	14
1.5	Tok Φ_t generovaný vektorovým polem	15
1.5.1	Zobrazení <i>push-forward</i> a <i>pull-back</i>	16
1.5.2	Lieův přenos funkce, vektoru a formy	17
1.6	Lieova derivace \mathcal{L}_x	18
1.7	Diferenciální 2-formy a jejich vztah k 1-formám	20
2	Geometrická formulace Lagrangeovy mechaniky	23
2.1	Fázový portrét: dynamický systém coby vektorové pole	23
2.2	Základní geometrické objekty Lagrangeova formalismu	26
2.3	Lagrangeovská vektorová pole na TQ	27
2.4	Geometrická podoba Lagrangeových rovnic	28
2.5	Teorém Emmy Noetherové	31
3	Geometrická formulace Hamiltonovy mechaniky	34
3.1	Legendreova duální transformace	34
3.2	Jednotné souřadnice na T^*Q a symplektická matice	37
3.3	Geometrická podoba Hamiltonových rovnic	38
3.4	Fázový prostor coby symplektická varieta	39
3.5	Poissonovy závorky geometricky	40
3.6	Hamiltonovská verze teorému Emmy Noetherové	41
3.7	Invariance symplektické formy	42
3.8	Kanonické transformace geometricky	42
3.9	Liouvilleova věta	44
A	Další vlastnosti tečného bandlu TQ	46
A.1	Symplektická struktura na TQ	46
A.2	Hamiltonovská dynamika na TQ	47
B	Časově závislé hamiltoniány	50
B.1	Zavedení objektů na rozšířeném fázovém prostoru	51
B.2	Pohybové rovnice a vztah k časově nezávislé mechanice	52
B.3	Časově závislé kanonické transformace	55

<i>OBSAH</i>	3
B.4 Geometrická interpretace Hamiltonovy–Jacobiho teorie	57
Shrnutí hlavních pojmů a notace	58
Anglický slovníček	60
Rejstřík	61
Literatura	64

Kapitola 1

Základy diferenciální geometrie

Diferenciální geometrie je společným jazykem velké části moderní fyziky. Jedná se v podstatě o spojení geometrie a matematické analýzy, v níž jsou metody klasického kalkulu aplikovány na křivky, plochy a další geometrické objekty, přičemž zavedení pojmů a manipulace s nimi jsou oproštěny od konkrétních souřadnic.

1.1 Variety a základní objekty na nich

Fundamentálním pojmem diferenciální geometrie je varieta. Věnujeme proto následující odstavce jeho zavedení a zevrubnému popisu. Poté na varietách postupně vybudujeme strukturu: funkce, křivky a především vektory a 1-formy.

1.1.1 Pojem variety

Různé variety jsou arénou nejen klasické mechaniky, ale i mnoha dalších oborů fyziky a matematiky. Jmenujme například polní teorie (elektromagnetismus a další kalibrační pole), teorii relativity, prostory řešení diferenciálních rovnic či Lieovy grupy.

Zcela obecně (a vágně) lze varietu charakterizovat jako „spojitý prostor, který je lokálně kartézský a lze na něm provádět derivování“.¹ Varietou tedy není například množina racionálních čísel.

Názorná ilustrace: *zemský povrch (globus)*

Příkladem jednoduché variety je zemský povrch. Můžeme ho idealizovat jako sféru, tedy spojitou zakřivenou dvourozměrnou plochu \mathcal{S}^2 , pro kterou zjevně platí:

- lokálně můžeme zavést mapy souřadnic (např. mapu Evropy, Asie, atd.)
- mapy dohromady tvoří atlas pokrývající celou varietu \mathcal{S}^2
- trajektorie (např. vlaku) je omezena jen na varietu
- vůči jednotlivým mapám lze studovat nejen trajektorii, ale i rychlost nebo zrychlení, lze tedy derivovat a integrovat
- údaje určené z jednotlivých map lze mezi mapami na jejich překryvech konzistentně převádět, příslušné veličiny jsou tak určeny globálně, tedy „bez ohledu“ na konkrétní mapy.

Zhruba řečeno je tedy varieta \mathcal{M} dimenze n množina bodů, která je *lokálně* podobná kartézskému prostoru \mathbb{R}^n , neboli okolí každého bodu může být parametrizováno n nezávislými souřadnicemi.

¹Nemusí být přítom metrický, euklidovský, afinní, apod.

Přesněji — a to už je rigorózní matematická definice — *varieta* \mathcal{M} je množina, jejíž každý bod P leží v nějaké otevřené množině² \mathcal{U} , která je spojitě vzájemně jednoznačně zobrazená na otevřenou podmnožinu \mathbb{R}^n . Symbolicky to lze vyjádřit

$$\forall P \in \mathcal{M} \exists \mathcal{U} \subset \mathcal{M} \text{ taková, že } P \in \mathcal{U},$$

$$\text{a } \exists \text{ spojitě } \phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ takové, že } \mathcal{U} \leftrightarrow \phi(\mathcal{U}) \text{ je jednoznačné,}$$

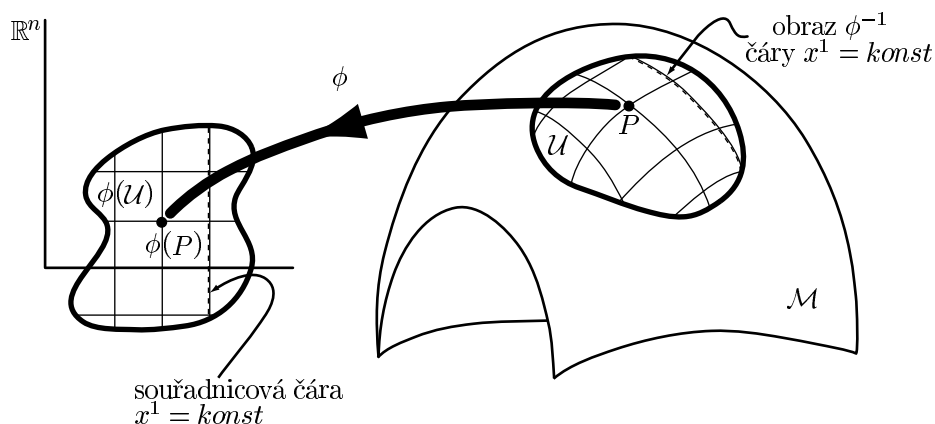
přičemž

- ϕ nazýváme souřadnicové zobrazení
- dvojici (\mathcal{U}, ϕ) nazýváme mapa
- číslo n nazýváme dimenzí variety \mathcal{M} .

Zobrazení ϕ přitom zavádí na \mathcal{U} lokální souřadnicový systém, který je inverzním³ obrazem ϕ^{-1} kartézského systému \mathbb{R}^n , neboli

$$\phi(P \in \mathcal{U}) \equiv (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n,$$

kde x^1, \dots, x^n představují souřadnice bodu P v lokální mapě.



Obrázek 1.1: Varieta \mathcal{M} je pokryta (lokálními) mapami neboli zobrazeními ϕ z \mathcal{U} do \mathbb{R}^n .

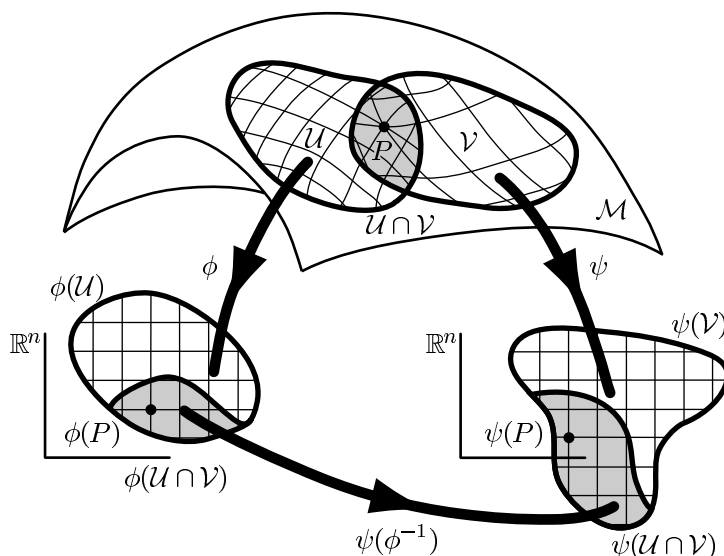
Jak jsme již uvedli na příkladě zemského povrchu, celá varieta \mathcal{M} je pokryta atlasem, neboli souborem map. Požadujeme ovšem, aby v místech překryvu byl vztah mezi mapami (resp. jejich souřadnicemi) dostatečně hladký.

Konkrétně: Nechtě (\mathcal{U}, ϕ) a (\mathcal{V}, ψ) jsou dvě různé mapy, přičemž souřadnice bodu $P \in \mathcal{U} \cap \mathcal{V}$ jsou $\phi(P) = (x^1, \dots, x^n)$ a $\psi(P) = (y^1, \dots, y^n)$. Tím je definováno zobrazení $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$: $\psi(\phi^{-1})$, tedy explicitně $(y^1(x^1, \dots, x^n), \dots, y^n(x^1, \dots, x^n))$. Toto zobrazení musí být dostatečně hladké⁴ pro všechny mapy atlasu a všechny překryvy. Odtud název „diferencovatelná varieta“.

²Tento systém otevřených množin tvoří z \mathcal{M} topologický prostor.

³Zobrazení ϕ^{-1} existuje, protože ϕ je vzájemně jednoznačné.

⁴Technicky to znamená splnění požadavku spojitosti parciálních derivací $\frac{\partial^r y^i}{(\partial x^j)^r}$ až do jistého řádu r . Hovoříme pak o $C^{(r)}$ varietě. Obvykle hladkostí rozumíme existenci spojitých derivací všech řádů.



Obrázek 1.2: Na překryvech $U \cap V$ definují souřadnicová zobrazení ϕ a ψ složené zobrazení $\psi(\phi^{-1})$ z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^n , po němž požadujeme, aby bylo hladké.

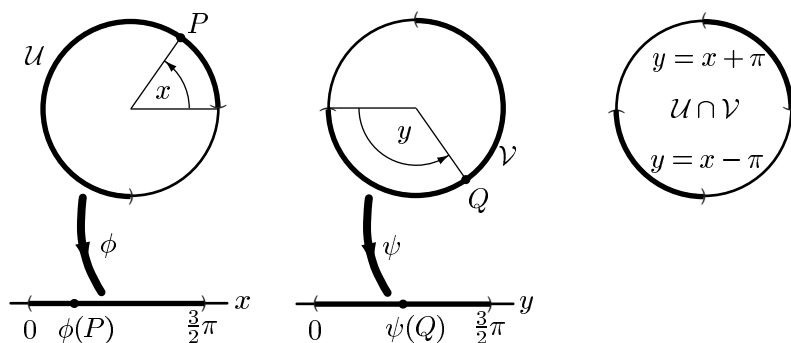
Poznámky:

- O dvou atlasech řekneme, že jsou ekvivalentní a definují stejnou varietu, pokud jejich sjednocení je opět atlas splňující všechny podmínky zformulované výše. Na jednom topologickém prostoru lze zavést i vzájemně neekvivalentní atlasy, které pak definují různé variety lišící se tzv. diferenciální strukturou.
- Na diferencovatelné varietě lze vybudovat významnou rozsáhlou strukturu (funkce, křivky, vektory, formy, Lieovy derivace, atd.). V následujícím textu zavedeme jen ty pojmy, které budeme potřebovat.

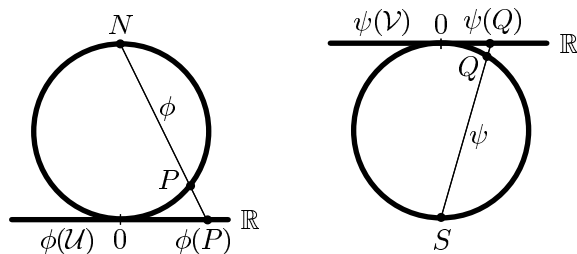
Příklady variet:

- *kružnice* S^1

– atlas tvoří alespoň 2 mapy, například mapa (U, ϕ) odpovídá úhlu $x \in (0, \frac{3}{2}\pi)$ a mapa (V, ψ) úhlu $y \in (0, \frac{3}{2}\pi)$, viz obrázek. Na překryvech $U \cap V$ platí mezi těmito lokálními souřadnicemi vztahy $y = x + \pi$ resp. $y = x - \pi$. To jsou evidentně hladké funkce, takže kružnice S^1 je hladká jednorozměrná diferencovatelná varieta (která je odlišná od \mathbb{R}^1).



– jiný atlas dvou map lze zavést stereografickou projekcí ze severního resp. jižního pólu



– v mechanice tvoří S^1 konfigurační varietu matematického kyvadla (*konfigurační varieta* je množina všech poloh daného systému)

• *sféra S^2*

- atlas tvoří alespoň 2 mapy
- lze ho zavést např. pomocí stereografické projekce
- v mechanice tvoří S^2 konfigurační varietu sférického kyvadla

• *torus T^2 (anuloid)*

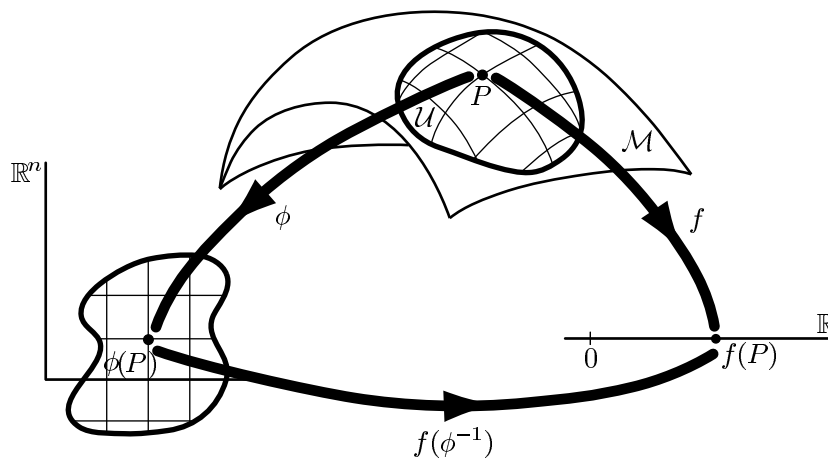
- atlas tvoří alespoň 3 mapy
- v mechanice tvoří T^2 konfigurační varietu dvojkyvadla

1.1.2 Funkce na varietě

Funkcí f na varietě \mathcal{M} nazýváme zobrazení

$$f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}, \tag{1.1}$$

neboli situaci, kdy každému bodu $P \in \mathcal{M}$ je přiřazeno reálné číslo $f(P)$. V lokálních souřadnicích mapy (U, ϕ) lze funkci f reprezentovat jejím souřadnicovým vyjádřením $f(\phi^{-1}) = f(x^1, \dots, x^n)$.



Obrázek 1.3: Funkce f na varietě \mathcal{M} je zobrazení z \mathcal{M} do \mathbb{R} .

Ilustrace: *hustota obyvatel na Zemi, teplota bubliny foukané z rozžhaveného skla*

Je tedy vidět, že pojem funkce na varietě je přirozený a intuitivní, neboť s funkcemi na varietách se ve skutečnosti setkáváme docela často.

1.1.3 Křivky na varietě

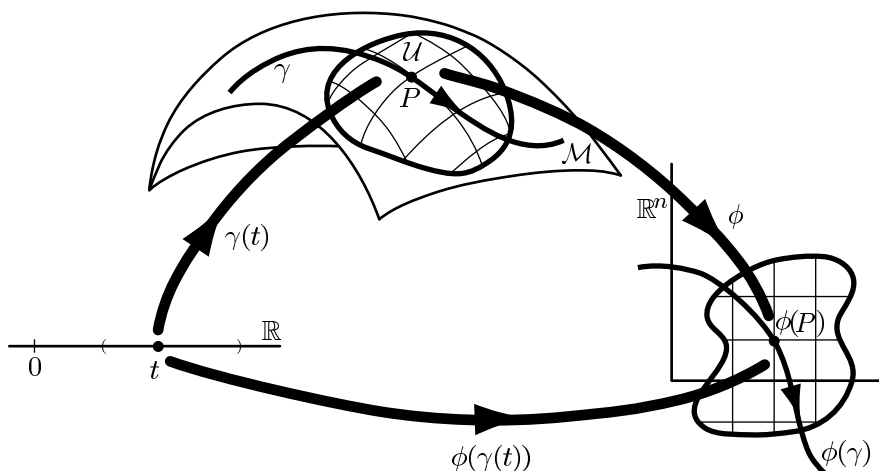
Křivkou $\gamma(t)$ na varietě \mathcal{M} nazýváme diferencovatelné zobrazení

$$\boxed{\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}}, \quad (1.2)$$

kde t je spojitý reálný parametr a $\gamma(t)$ je odpovídající jednorozměrná spojitá trajektorie na \mathcal{M} . Přesněji řečeno, parametrická křivka $\gamma(t)$ je hladké zobrazení $\Omega \rightarrow \mathcal{M}$, kde $\Omega \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval. Symbolicky tedy

$$t_0 \in \Omega \rightarrow \text{bod } P \equiv \gamma(t_0) \in \mathcal{M}.$$

V lokální mapě (\mathcal{U}, ϕ) je okolí bodu $P \in \mathcal{M}$ parametrizováno souřadnicemi (x^1, \dots, x^n) , takže křivka $\gamma(t)$ je lokálně určena funkcemi $(x^1(t), \dots, x^n(t))$.



Obrázek 1.4: Parametrická křivka $\gamma(t)$ na varietě \mathcal{M} je zobrazení z \mathbb{R} do \mathcal{M} .

Ilustrace: železniční trať, řeka

1.1.4 Vektory na varietě

Vektor \mathbf{v} v bodě $P \in \mathcal{M}$ je $\boxed{\text{dán tečnou ke křivce } \gamma(t)}$ procházející bodem P . Vektor \mathbf{v} má:

- daný směr (určený směrem křivky $\gamma(t)$)
- danou velikost (určenou velikostí změny $\gamma(t)$ se změnou t).

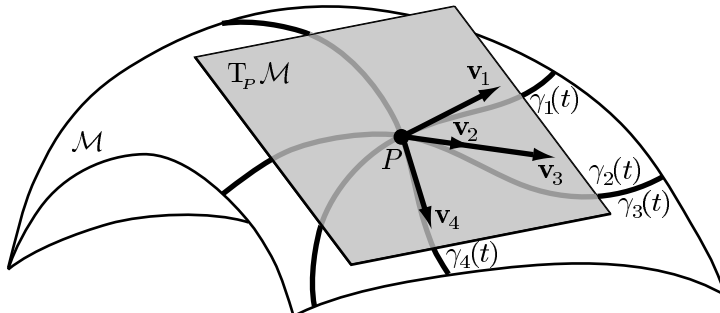
Tečný prostor:

Skrze každý bod $P \in \mathcal{M}$ procházejí různé křivky různých parametrizací. Množinu všech vektorů určenou těmito křivkami nazýváme tečným prostorem $T_P\mathcal{M}$ k varietě \mathcal{M} v bodě P .

Důležité poznámky:

- Zatímco křivky $\gamma(t)$ leží v \mathcal{M} , vektory \mathbf{v} leží v $T_P\mathcal{M}$, nikoli ve varietě \mathcal{M} .
- Ve skutečnosti jsou vektory $\mathbf{v} \in T_P\mathcal{M}$ třídami ekvivalence tečen ke $\gamma(t)$, neboť daným směrem a danou rychlostí prochází bodem P nekonečně mnoho různých křivek. Vektor \mathbf{v} tedy ztotožňujeme s třídami ekvivalence křivek stejného směru a rychlosti.

- $T_P\mathcal{M}$ je lineární vektorový prostor.
- V každém bodě $P \in \mathcal{M}$ existuje báze $T_P\mathcal{M}$, tedy $\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i$, kde $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ jsou bázevé vektory a v^i jsou jednotlivé složky vektoru \mathbf{v} v dané bázi (používáme sumační konvenci).
- Vidíme, že dimenze $T_P\mathcal{M}$ je rovna dimenzi \mathcal{M} , tedy n .



Obrázek 1.5: Vektory \mathbf{v} tečné ke křivkám $\gamma(t)$ v bodě P variety \mathcal{M} tvoří tečný prostor $T_P\mathcal{M}$.

Vektor coby diferenciální operátor:

Uvažujme nyní:

- hladkou funkci f na varietě \mathcal{M} ,
- křivku $\gamma(t)$ procházející bodem $P \in \mathcal{M}$; ta určuje tečný vektor $\mathbf{v} \in T_P\mathcal{M}$.

Funkce $f(\gamma(t)) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tedy udává hodnotu f podél γ , přičemž parametr t je nezávislá proměnná. Nyní provedeme derivaci f „ve směru vektoru \mathbf{v} “, neboli⁵

$$\frac{df(\gamma(t))}{dt} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(\gamma(t + \Delta t)) - f(\gamma(t))}{\Delta t}, \quad (1.3)$$

kteřou lze chápat jako lineární operaci, která funkci f přiřazuje v P číslo $\frac{df}{dt}$. Můžeme tedy na vektor \mathbf{v} nahlížet jako na diferenciální operátor operující na funkcích f ; odmyslíme-li si f , což je libovolná hladká funkce, zbyde z derivace $\frac{df}{dt}$ samotný operátor $\frac{d}{dt}$. V lokální souřadnicové mapě (\mathcal{U}, ϕ) má křivka $\gamma(t)$ vyjádření $x^i(t)$, a v bodě P lze tedy psát

$$\mathbf{v}(f) \equiv \frac{df}{dt} \equiv \frac{df(\gamma(t))}{dt} = \frac{d}{dt} f(x^i(t)) = \frac{dx^i}{dt} \frac{\partial f}{\partial x^i} = v^i \frac{\partial f}{\partial x^i}, \quad (1.4)$$

kde jsme označili $v^i \equiv \frac{dx^i}{dt}$. Odmyslíme-li si nyní f , dostáváme formálně operátor

$$\mathbf{v} \equiv \frac{d}{dt} = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}. \quad (1.5)$$

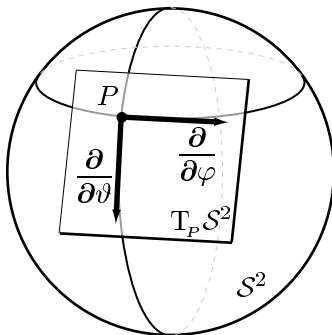
Srovnáním s obecným výrazem $\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i$, kde \mathbf{e}_i je báze $T_P\mathcal{M}$ a v^i jsou složky \mathbf{v} vůči této bázi, je vidět, že

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \right) \text{ je tzv. } \underline{\text{souřadnicová báze}} \text{ tečného prostoru } T_P\mathcal{M}. \quad (1.6)$$

⁵Argument $\gamma(t)$ popisuje bod P , zatímco argument $\gamma(t + \Delta t)$ popisuje bod, který leží na křivce γ mající tečnu \mathbf{v} , a který má hodnotu parametru t zvětšenou o Δt oproti hodnotě odpovídající bodu P . Symbolicky bychom mohli psát $\gamma(t) \equiv P$ a $\gamma(t + \Delta t) \equiv P + \mathbf{v}\Delta t$.

Operátory parciálních derivací $\frac{\partial}{\partial x^i}$ zřejmě reprezentují tečné vektory k souřadnicovým čarám x^i , neboli jsou to derivace ve směru příslušných souřadnicových čar.

Příklad: Na sféře S^2 je tečným prostorem $T_P S^2$ v bodě P rovina. Bázi tohoto vektorového prostoru tvoří například dvojice vektorů $\left(\frac{\partial}{\partial \vartheta}, \frac{\partial}{\partial \varphi}\right)$. To znamená, že každý vektor v tečné rovině $T_P S^2$ lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektoru $\frac{\partial}{\partial \vartheta}$ ve směru poledníku a vektoru $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ ve směru rovnoběžky.



1.1.5 Formy na varietě

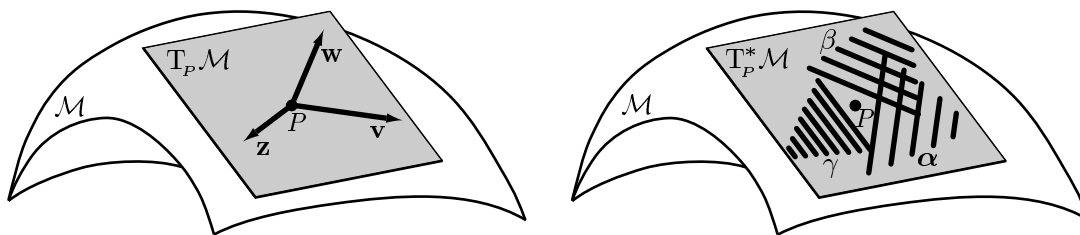
1-forma α v bodě $P \in \mathcal{M}$ je lineární funkcionál na vektorech z $T_P \mathcal{M}$, tedy platí

$$\begin{aligned} \alpha(\mathbf{v}) &= \text{číslo} \in \mathbb{R}, \\ \alpha(c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2) &= c_1 \alpha(\mathbf{v}_1) + c_2 \alpha(\mathbf{v}_2). \end{aligned} \tag{1.7}$$

Stejně jako vektor má i 1-forma svoji velikost a orientaci.

Kotečný prostor:

Všechny formy v bodě $P \in \mathcal{M}$ tvoří lineární vektorový prostor nazývaný kotečný prostor $T_P^* \mathcal{M}$ k varietě \mathcal{M} v bodě P . Kotečný prostor $T_P^* \mathcal{M}$ je duální k $T_P \mathcal{M}$.



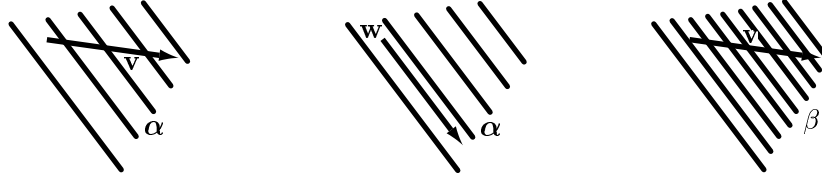
Obrázek 1.6: Kotečný prostor $T_P^* \mathcal{M}$ 1-form je duální k tečnému prostoru $T_P \mathcal{M}$ vektorů.

Vztah vektorů a 1-forem:

Vektory a 1-formy v bodě $P \in \mathcal{M}$ jsou navzájem duální. Jejich interakce je dána operací „působení 1-formy na vektor“ z definice (1.7), kterou lze též chápat jako bilineární operaci zúžení (kontrakce), kterou označujeme

$$\langle \alpha, \mathbf{v} \rangle \equiv \alpha(\mathbf{v}). \tag{1.8}$$

Výsledkem zúžení vektoru s 1-formou je tedy reálné číslo z definice (1.7). Reprezentujeme-li formu α pomocí vrstevnic⁶ a vektor \mathbf{v} pomocí šipky, pak geometrický význam čísla $\langle \alpha, \mathbf{v} \rangle$ odpovídá počtu vrstevnic, které šipka protne. Záleží zjevně na jejich vzájemné orientaci a velikosti. Čím je 1-forma větší, tím jsou její vrstevnice hustší. Čím je vektor větší, tím delší je jeho šipka.



Bázi kotečného prostoru $T_p^*\mathcal{M}$ tvoří n 1-forem $(\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$ takových, že každou 1-formu z $T_p^*\mathcal{M}$ lze vyjádřit jako⁷ $\alpha = \alpha_i \varepsilon^i$, kde α_i představují složky α k této bázi. Obvykle za bázi 1-forem volíme tzv. duální bázi k bázevým vektorům $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ v $T_p\mathcal{M}$ definovanou předpisem

$$\langle \varepsilon^i, \mathbf{e}_j \rangle = \delta_j^i. \quad (1.9)$$

Jako okamžitý důsledek (1.9) dostáváme následující vztahy

$$\langle \alpha, \mathbf{e}_j \rangle = \langle \alpha_i \varepsilon^i, \mathbf{e}_j \rangle = \alpha_i \langle \varepsilon^i, \mathbf{e}_j \rangle = \alpha_i \delta_j^i = \alpha_j, \quad (1.10)$$

$$\langle \varepsilon^j, \mathbf{v} \rangle = \langle \varepsilon^j, v^i \mathbf{e}_i \rangle = v^i \langle \varepsilon^j, \mathbf{e}_i \rangle = v^i \delta_i^j = v^j, \quad (1.11)$$

$$\langle \alpha, \mathbf{v} \rangle = \langle \alpha_i \varepsilon^i, v^j \mathbf{e}_j \rangle = \alpha_i v^j \langle \varepsilon^i, \mathbf{e}_j \rangle = \alpha_i v^i. \quad (1.12)$$

Diferenciál funkce coby 1-forma:

Nejdůležitější 1-formou je *diferenciál funkce*. Je-li f hladká funkce na varietě \mathcal{M} , potom diferenciál funkce f v bodě $P \in \mathcal{M}$ je forma $\mathbf{d}f$ definovaná vztahem

$$\langle \mathbf{d}f, \mathbf{v} \rangle \equiv \mathbf{v}(f). \quad (1.13)$$

Zúžení 1-formy $\mathbf{d}f$ s vektorem \mathbf{v} tedy je právě derivace funkce f ve směru vektoru $\mathbf{v} \in T_p\mathcal{M}$, viz vztahy (1.3), (1.4).

Důsledek: Vezmeme-li za vektor \mathbf{v} přímo vektory (1.6) souřadnicové báze $T_p\mathcal{M}$ a za funkci f přímo souřadnice x^i z mapy (\mathcal{U}, ϕ) , pak z definice (1.13) plyne

$$\langle \mathbf{d}x^i, \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle \equiv \mathbf{v}(f) = \frac{\partial x^i}{\partial x^j} = \delta_j^i, \quad (1.14)$$

takže⁸

$$(\mathbf{d}x^1, \dots, \mathbf{d}x^n) \text{ je } \underline{\text{duální souřadnicová báze}} \text{ kotečného prostoru } T_p^*\mathcal{M}. \quad (1.15)$$

Geometricky: zatímco vektor $\frac{\partial}{\partial x^i}$ obvykle reprezentuje šipka ve směru souřadnicové čáry x^i , 1-forma $\mathbf{d}x^i$ je znázorněna množinou ploch (vrstevnic) $x^i = konst.$

Každou 1-formu z kotečného prostoru $T_p^*\mathcal{M}$ lze tedy psát $\alpha = \alpha_i \mathbf{d}x^i$, přičemž platí (viz (1.10) a (1.11)), že

$$\alpha_j = \langle \alpha, \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle, \quad (1.16)$$

$$v^j = \langle \mathbf{d}x^j, \mathbf{v} \rangle. \quad (1.17)$$

⁶Ve více dimenzích je forma α reprezentována vrstevnicovými (nad)plochami.

⁷Srovnej s $\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i$.

⁸Srovnej (1.14) s definicí duální báze (1.9).

Diferenciál $\mathbf{d}f$ funkce f jako speciální 1-formu α lze ve složkách zapsat $\mathbf{d}f = \alpha_i \mathbf{d}x^i$, kde podle (1.13) je $\alpha_i = \langle \mathbf{d}f, \frac{\partial}{\partial x^i} \rangle = \frac{\partial f}{\partial x^i}$, takže

$$\boxed{\mathbf{d}f = \frac{\partial f}{\partial x^i} \mathbf{d}x^i} \quad (1.18)$$

a dále platí

$$\langle \mathbf{d}f, \mathbf{v} \rangle = \frac{\partial f}{\partial x^i} v^i. \quad (1.19)$$

Geometrický význam: Diferenciál $\mathbf{d}f$ odpovídá znázornění funkce f pomocí ekvipotenciál (v různých fyzikálních souvislostech zvaných též vrstevnice, izotermy, apod.).

Poznámka: Ze vztahu (1.18) vidíme, že $\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n}\right)$ jsou souřadnicové složky 1-formy $\mathbf{d}f \in T_p^*\mathcal{M}$. V prostorech se skalárním součinem (metrikou) lze s touto 1-formou asociovat vektor $\text{grad}f \in T_p\mathcal{M}$ vyjadřující směr největšího růstu f , který je kolmý na ekvipotenciály, neboli

$$\text{grad}f \cdot \mathbf{v} \equiv g_{ki} (\text{grad}f)^k v^i, \quad (1.20)$$

kde

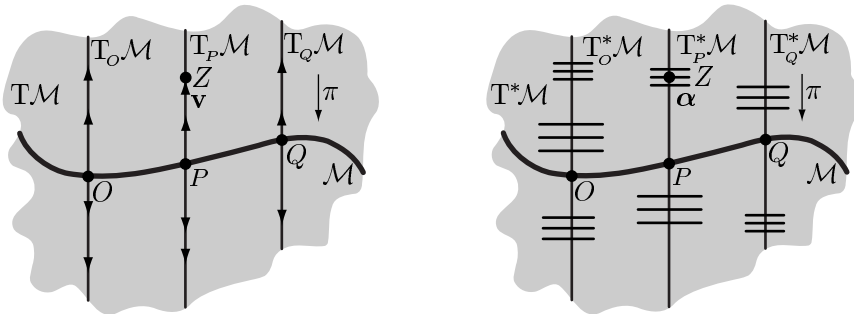
$$(\text{grad}f)^k \equiv g^{kj} \frac{\partial f}{\partial x^j}. \quad (1.21)$$

V kartézských souřadnicích v \mathbb{R}^n je přirozená metrika triviální, totiž $g_{ki} = \delta_{ki}$, takže složky vektoru $\text{grad}f$ jsou číselně rovny složkám 1-formy $\mathbf{d}f$. Proto se v základních kurzech fyziky (nepřesně) hovoří o *vektoru gradientu*, jehož složky jsou $\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x^n}\right)$, nikoli o *1-formě $\mathbf{d}f$* , která má tyto složky vždy.

1.2 Tečný bandl, kotečný bandl

Tečný bandl $T\mathcal{M}$ je sjednocení všech tečných prostorů $T_p\mathcal{M}$ ve všech bodech P variety, tedy $T\mathcal{M} \equiv \bigcup_{P \in \mathcal{M}} T_p\mathcal{M}$. Je to opět varieta, jejíž dimenze je $2n$. Každý bod z variety $T\mathcal{M}$ přitom představuje nějaký *konkrétní* tečný vektor $\mathbf{v} \in T_p\mathcal{M}$ v *jistém* bodě $P \in \mathcal{M}$.

Kotečný bandl $T^*\mathcal{M}$ je sjednocení všech kotečných prostorů $T_p^*\mathcal{M}$ ve všech bodech P variety, tedy $T^*\mathcal{M} \equiv \bigcup_{P \in \mathcal{M}} T_p^*\mathcal{M}$. Každý bod z variety $T^*\mathcal{M}$ představuje nějakou *konkrétní* 1-formu $\alpha \in T_p^*\mathcal{M}$ v *jistém* bodě $P \in \mathcal{M}$.



Obrázek 1.7: Tečný bandl $T\mathcal{M}$ je varieta všech tečných prostorů $T_p\mathcal{M}$ (vlevo), zatímco duální kotečný bandl $T^*\mathcal{M}$ je varieta všech kotečných prostorů $T_p^*\mathcal{M}$ (vpravo).

Pro tečný bandl platí, že:

- Bod $Z \in T\mathcal{M}$ jednoznačně určuje:
 1. vektor $\mathbf{v} \in T_P\mathcal{M}$ (dané velikosti a orientace)
 2. bod $P \in \mathcal{M}$ (v němž je \mathbf{v} tečný k \mathcal{M}).
- Existuje přirozená projekce $\pi : T\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$, přičemž platí $\pi(Z) = P$.
- V lokálních souřadnicích má bod $P \in \mathcal{M}$ souřadnice x^i , vektor \mathbf{v} má složky v^i v bázi $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$.
- Bod $Z \in T\mathcal{M}$ má proto přirozené souřadnice $(x^1, \dots, x^n, v^1, \dots, v^n)$, přičemž projekce je v souřadnicích dána jednoduše $\pi(x^1, \dots, x^n, v^1, \dots, v^n) = (x^1, \dots, x^n)$.

Podobnou strukturu má kotečný bandl, s tím rozdílem, že $Z \in T^*\mathcal{M}$ představuje konkrétní 1-formu $\alpha \in T_P^*\mathcal{M}$ lokalizovanou v daném bodě $P \in \mathcal{M}$. Jeho souřadnice jsou $(x^1, \dots, x^n, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$, přičemž $\pi(x^1, \dots, x^n, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = (x^1, \dots, x^n)$.

Právě díky existenci projekce π mají tečný bandl $T\mathcal{M}$ a kotečný bandl $T^*\mathcal{M}$ speciální strukturu. Jsou příkladem tzv. fibrovaného prostoru.

1.3 Fíbrovaný prostor

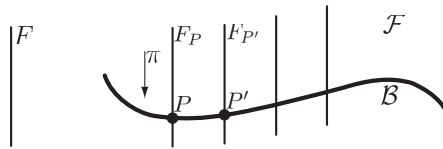
Fíbrovaný prostor je vlastně zobecněním kartézského součinu. Nejsnáze lze podstatu fibrované struktury přiblížit, pokud si představíme varietu \mathcal{B} , do jejíhož každého bodu $P \in \mathcal{B}$ je jakoby „vlepena“ další varieta F_P , viz obr. 1.8. Přitom musí platit, že variety F_P jsou ve všech bodech $P \in \mathcal{B}$ difeomorfní⁹ s nějakou společnou „typickou“ varietou F , tj. pro $\forall P, P' \in \mathcal{B} : F_P \simeq F_{P'} \simeq F$. Varieta \mathcal{B} se nazývá *bázová varieta*, F je *typický fibr* a F_P je *fibr v bodě P* . Sjednocení

$$\mathcal{F} \equiv \bigcup_{P \in \mathcal{B}} F_P \quad (1.22)$$

pak nazýváme *totální prostor*. Vztah mezi totálním prostorem a bázovou varietou je přitom dán přirozeným zobrazením $F_P \rightarrow P$,

$$\pi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{B} \quad (1.23)$$

nazývaným *kanonická projekce*. Pojmeme fibrovaného prostoru tedy obecně rozumíme strukturu $(\mathcal{B}, \pi, F, \mathcal{F})$ zahrnující bázovou varietu, kanonickou projekci, typický fibr a totální prostor.



Obrázek 1.8: Schématické znázornění fibrované struktury.

Navíc je ale ještě požadována tzv. lokální součinnová struktura, tj. existence pokrytí \mathcal{U}_α bázové variety \mathcal{B} a soustavy difeomorfizmů

$$\psi_\alpha : \pi^{-1}(\mathcal{U}_\alpha) \rightarrow \mathcal{U}_\alpha \times F, \quad (1.24)$$

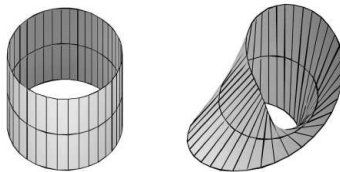
takových, že $\pi_{\mathcal{U}_\alpha}(\psi_\alpha) = \pi$, přičemž zobrazením $\pi_{\mathcal{U}_\alpha}$ je myšlena restrikce na \mathcal{U}_α . Vágně řečeno, \mathcal{F} (přínejmenším) lokálně vypadá jako součin $\mathcal{B} \times F$, až na to že fibry F_P mohou být vůči sobě trochu „zkroucené“. Soustava zobrazení ψ_α se nazývá *lokální trivializace*.

⁹Dvě variety nazýváme difeomorfní, pokud mezi nimi existuje bijektivní zobrazení f a přitom platí, že f a f^{-1} jsou hladká zobrazení.

Nejjednodušším fibrovaným prostorem je zjevně tzv. *součinnová fibrovaná varieta*, kdy totálním prostorem je kartézský součin báze a fibr, projekcí je projekce na první člen tohoto součinu:

$$\pi : \mathcal{B} \times F \rightarrow \mathcal{B}. \quad (1.25)$$

Ilustrace: Jednoduchými příklady součinnové fibrované variety jsou válec a Möbiův pruh. V obou případech je báze varieta \mathcal{B} kružnice (varieta S^1) a typický fibr F reálný interval (a, b) .



Ilustrace: Příkladem fibrované variety je také *časoprostor*. V *Aristotelově* pojetí jsou čas i prostor považovány za absolutní a časoprostor lze tudíž interpretovat jako čtyřrozměrnou varietu \mathcal{M}^4 definovanou kartézským součinem $\mathcal{M}^4 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, kde $t \in \mathbb{R}$ a $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$. Kanonická projekce je dána

$$\pi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}. \quad (1.26)$$

Naproti tomu *Newtonův* časoprostor, jenž je charakteristický absolutním časem avšak relativním prostorem¹⁰, již není příkladem kartézského součinu času a prostoru. Přesto má fibrovanou strukturu s kanonickou projekcí

$$\pi : \mathcal{M}^4 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (1.27)$$

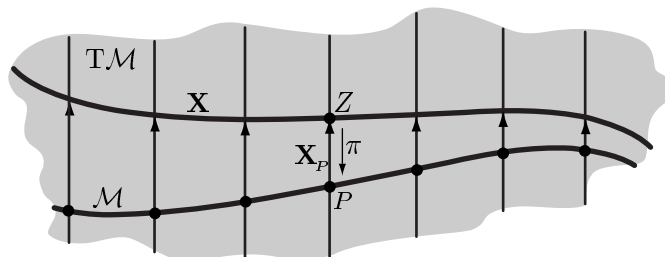
kde \mathcal{M}^4 značí čtyřrozměrnou časoprostorovou varietu. Tato projekce přiřazuje každé časoprostorové události $Z \in \mathcal{M}^4$ odpovídající hodnotu času $t = \pi(Z)$. Fíbrem je v tomto případě inverzní obraz $\pi^{-1}(t)$, kde $t \in \mathbb{R}$, tedy třírozměrný prostor v daném čase. Každý fibr je difeomorfní s \mathbb{R}^3 . Fíbrovanou strukturu, avšak složitější, mají i *Minkowského* časoprostor speciální teorie relativity a zakřivený časoprostor *Einsteinovy* obecné teorie relativity.

1.4 Vektorové pole a jeho integrální křivky

Vektorovým polem ve fyzice intuitivně označujeme situaci, kdy je „v každém bodě prostoru definován vektor“. V preciznější geometrické formulaci to znamená, že ve všech tečných prostorech $T_p\mathcal{M}$ variety \mathcal{M} (fibrech nad P) existuje unikátní vektor \mathbf{X}_P , přičemž „pro blízké body P variety jsou vektory \mathbf{X}_P blízké“. To nás přivádí k přesné definici.

Definice:

- vektorové pole \mathbf{X} je hladký řez¹¹ na tečném bandlu $T\mathcal{M}$
- pole 1-forem Θ je hladký řez na kotečném bandlu $T^*\mathcal{M}$.



¹⁰Platí totiž známý Galileiho princip relativity.

¹¹Řez je hladké zobrazení \mathbf{X} z \mathcal{M} do $T\mathcal{M}$ takové, že $\pi(\mathbf{X})$ je identické zobrazení na \mathcal{M} , tedy $\pi(\mathbf{X}(P)) = P$.

Pro další výklad je důležité, že každé vektorové pole automaticky generuje množinu tzv. integrálních křivek (ve fyzice v různých kontextech nazývaných „silokřivky“, „proudnice“ atd.):

Definice:

Integrální křivky vektorového pole \mathbf{X} jsou křivky $\gamma(t)$ takové, že tečný vektor ke $\gamma(t)$ koinciduje s $\mathbf{X}_P \in T_P\mathcal{M}$, a to v každém bodě $P \in \mathcal{M}$.

Ilustrace: Integrální křivku můžeme přirovnat k turistické trase lemované orientačními šipkami udávajícími směr a dobu dalšího pochodu.

Věta: Pro spojitá vektorová pole na diferencovatelné varietě integrální křivky existují.

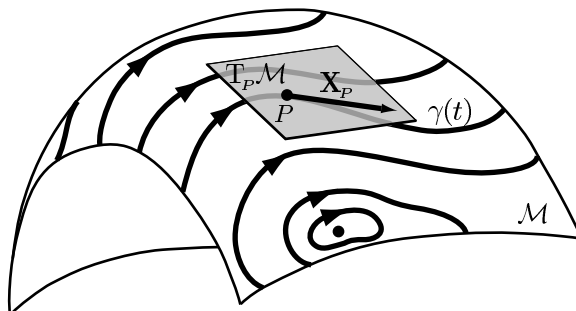
Důkaz: lze podat konstruktivně

V lokálních souřadnicích (x^1, \dots, x^n) v okolí každého bodu $P \in \mathcal{M}$ musí platit

$$\boxed{\frac{dx^i}{dt} = X^i(x^k)}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.28)$$

kde $\frac{dx^i}{dt}$ jsou složky tečného vektoru ke křivce $\gamma(t) \equiv (x^1(t), \dots, x^n(t))$ a $X^i(x^k)$ jsou složky vektorového pole \mathbf{X} v bodě P , tedy \mathbf{X}_P . Tím dostáváme soustavu obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu tvaru (1.28). Existence jejího řešení $x^k(t)$ je zaručena matematickou větou o (lokální) existenci.

☒



Obrázek 1.9: Integrální křivky vektorového pole.

Platí:

- každým bodem $P \in \mathcal{M}$ prochází nějaká integrální křivka
- integrální křivky vyplňují celou varietu (tvoří tzv. kongruenci, která je $n - 1$ rozměrná)
- integrální křivky se mohou protínat jen v bodech kde $\mathbf{X} = 0$ (tzv. singulární body).

1.5 Tok Φ_t generovaný vektorovým polem

Vektorové pole \mathbf{X} tedy generuje integrální křivky $\gamma(t)$. Celá kongruence (množina) těchto křivek definuje zobrazení variety \mathcal{M} na sebe. Toto důležité zobrazení nazýváme tok generovaný polem \mathbf{X} .

Definice:

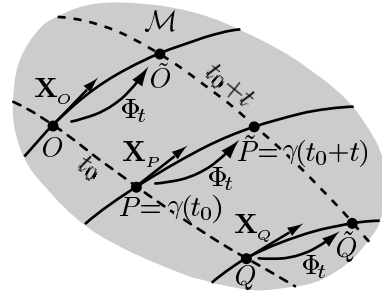
Tok Φ_t generovaný vektorovým polem \mathbf{X} je množina zobrazení $\Phi_t : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ definovaných

$$\boxed{\Phi_t : \gamma(t_0) \rightarrow \gamma(t_0 + t)}. \quad (1.29)$$

To znamená, že každý bod $P \equiv \gamma(t_0)$ variety \mathcal{M} je posunut podél křivky $\gamma(t)$ generované polem \mathbf{X} o vzdálenost parametru t do bodu $\tilde{P} \in \mathcal{M}$, kde $\tilde{P} = \gamma(t_0 + t)$. Platí tedy $\left. \frac{d}{dt} \Phi_t(P) \right|_{t=0} = \mathbf{X}_P$.

Poznámky:

- t je spojitý parametr množiny všech zobrazení Φ_t
- Φ_0 je identita
- $\Phi_{t_1+t_2} = \Phi_{t_1} \circ \Phi_{t_2}$, což vyjadřuje skládání zobrazení
- Φ_{-t} je inverzní zobrazení k Φ_t .



Vidíme, že tok Φ_t tvoří jednoparametrickou spojitou *Lieovu grupu transformací* na varietě \mathcal{M} .

1.5.1 Zobrazení *push-forward* a *pull-back*

Definice:

Hladké zobrazení Φ na varietě \mathcal{M} indukuje důležitá tečná zobrazení na (ko)tečném bandlu:¹²

- Φ_* na $T\mathcal{M}$: push-forward (zobrazení „postrč vpřed“ vektor)
- Φ^* na $T^*\mathcal{M}$: pull-back (zobrazení „stáhni zpět“ formu)

Konkrétně: nechť lokálně

$$\Phi : \mathcal{U}_P \rightarrow \mathcal{U}_{\Phi(P)} \quad (1.30)$$

zobrazuje body $P \in \mathcal{U}_P \subset \mathcal{M}$ na body $\Phi(P) \in \mathcal{U}_{\Phi(P)} \subset \mathcal{M}$, pak

$$\Phi_* : T_P \mathcal{M} \rightarrow T_{\Phi(P)} \mathcal{M} \quad (1.31)$$

zobrazuje vektor \mathbf{v} tečný ke křivce γ na vektor $\mathbf{w} \equiv \Phi_*(\mathbf{v})$ tečný k obrazu $\Phi(\gamma)$ křivky γ .
Naopak

$$\Phi^* : T_{\Phi(P)}^* \mathcal{M} \rightarrow T_P^* \mathcal{M} \quad (1.32)$$

zobrazuje formu α na formu $\beta \equiv \Phi^*(\alpha)$ předpisem $\langle \beta, \mathbf{v} \rangle \equiv \langle \alpha, \mathbf{w} \rangle$, neboli

$$\langle \Phi^*(\alpha), \mathbf{v} \rangle_P \equiv \langle \alpha, \Phi_*(\mathbf{v}) \rangle_{\Phi(P)}. \quad (1.33)$$

Explicitně v souřadnicích platí

$$\Phi : x^i \rightarrow y^j(x^i), \quad (1.34)$$

$$\mathbf{v} = v^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Rightarrow \mathbf{w} = w^j \frac{\partial}{\partial y^j} = \Phi_*(\mathbf{v}) = \left(v^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial y^j}, \quad (1.35)$$

$$\alpha = \alpha_i \mathbf{d}y^i \Rightarrow \beta = \beta_j \mathbf{d}x^j = \Phi^*(\alpha) = \left(\alpha_i \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right) \mathbf{d}x^j. \quad (1.36)$$

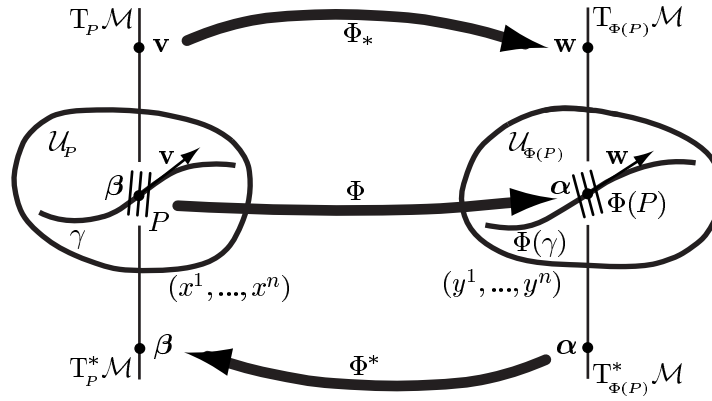
Je tedy

$$w^j = v^i \frac{\partial y^j}{\partial x^i}, \quad (1.37)$$

$$\beta_j = \alpha_i \frac{\partial y^i}{\partial x^j}, \quad (1.38)$$

což vyjadřuje transformační vlastnosti vektoru resp. 1-formy při přechodu od souřadnic x^i v okolí \mathcal{U}_P k souřadnicím y^j v okolí $\mathcal{U}_{\Phi(P)}$.

¹²Nemusí jít nutně jen o tok Φ_t , ale o libovolné hladké zobrazení Φ na varietě (tzv. difeomorfismus). Pro vzájemně jednoznačné zobrazení Φ lze Φ_* i Φ^* invertovat.



Obrázek 1.10: Zobrazení Φ na varietě \mathcal{M} přirozeně indukuje zobrazení Φ_* (push-forward) na tečném bandlu $T\mathcal{M}$ a zobrazení Φ^* (pull-back) na kotečném bandlu $T^*\mathcal{M}$.

1.5.2 Lieův přenos funkce, vektoru a formy

Integrální křivky vektorového pole \mathbf{X} definují tok Φ_t , což je hladké zobrazení a tudíž indukuje příslušná *lineární zobrazení* Φ_{t*} (push-forward) a Φ_t^* (pull-back).¹³ Tato tři zobrazení lze použít k definici Lieova přenosu funkcí, vektorů a 1-forem.

Definice:

- Lieův přenos funkce f je nová funkce \tilde{f} na varietě \mathcal{M} definovaná přímo pomocí toku Φ_t generovaného polem \mathbf{X} vztahem

$$\tilde{f}(\tilde{P}) = f(P), \quad \text{kde } \tilde{P} = \Phi_t(P). \quad (1.39)$$

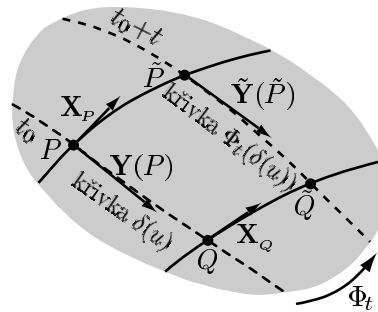
Funkce \tilde{f} má tedy v bodě \tilde{P} stejnou hodnotu jako původní funkce f v bodě P .

- Lieův přenos vektorového pole \mathbf{Y} podél pole \mathbf{X} je nové pole $\tilde{\mathbf{Y}}$ definované vztahem

$$\tilde{\mathbf{Y}}(\tilde{P}) = \Phi_{t*}(\mathbf{Y}(P)). \quad (1.40)$$

- Lieův přenos pole 1-forem α podél pole \mathbf{X} je analogicky dán

$$\alpha(P) = \Phi_t^*(\tilde{\alpha}(\tilde{P})). \quad (1.41)$$



Obrázek 1.11: Lieův přenos vektoru je push-forward zobrazení Φ_{t*} indukované tokem Φ_t , které je generováno polem \mathbf{X} . Konkrétně: vektor $\tilde{\mathbf{Y}}(\tilde{P})$ v bodě \tilde{P} je definován jako tečna ke křivce $\Phi_t(\delta(u))$, kde $\delta(u)$ je křivka tečná k výchozímu vektoru $\mathbf{Y}(P)$ v bodě P .

¹³Inverzní zobrazení k Φ_{t*} je Φ_{-t*} a podobně inverzní zobrazení k Φ_t^* je Φ_{-t}^* .

1.6 Lieova derivace \mathcal{L}_X

Smyslem Lieovy derivace je charakterizovat změnu geometrického objektu ve směru (podél) vektorového pole \mathbf{X} . Toho se docílí tím způsobem, že „od hodnoty veličiny v daném bodě odečteme hodnotu veličiny tam Lieovsky přenesené ze vzdálenosti t , tento rozdíl vydělíme t a provedeme limitu $t \rightarrow 0$ “. Konkrétně tedy

- Lieova derivace funkce f je funkce

$$\mathcal{L}_X f \equiv \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [f(\tilde{P}) - \tilde{f}(\tilde{P})] , \quad (1.42)$$

- Lieova derivace vektorového pole \mathbf{Y} je vektorové pole

$$\mathcal{L}_X \mathbf{Y} \equiv \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\mathbf{Y}(\tilde{P}) - \tilde{\mathbf{Y}}(\tilde{P})] , \quad (1.43)$$

- Lieova derivace pole 1-forem α je pole 1-forem

$$\mathcal{L}_X \alpha \equiv \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\alpha(\tilde{P}) - \tilde{\alpha}(\tilde{P})] . \quad (1.44)$$

Lze ukázat, že platí následující důležité vztahy:

1. Lieova derivace funkce je přímo rovna derivaci ve směru \mathbf{X} :

$$\boxed{\mathcal{L}_X f = \mathbf{X}(f) = \frac{df}{dt} = \langle \mathbf{d}f, \mathbf{X} \rangle} . \quad (1.45)$$

2. Platí, že

$$\mathcal{L}_X(f\mathbf{Y}) = (\mathcal{L}_X f)\mathbf{Y} + f\mathcal{L}_X \mathbf{Y} , \quad (1.46)$$

$$\mathcal{L}_X(f\alpha) = (\mathcal{L}_X f)\alpha + f\mathcal{L}_X \alpha . \quad (1.47)$$

3. Pro Lieovu derivaci zúžení platí Leibnizovo pravidlo

$$\boxed{\mathcal{L}_X \langle \alpha, \mathbf{Y} \rangle = \langle \mathcal{L}_X \alpha, \mathbf{Y} \rangle + \langle \alpha, \mathcal{L}_X \mathbf{Y} \rangle} . \quad (1.48)$$

4. Pro diferenciál platí $\mathcal{L}_X(\mathbf{d}f) = \mathbf{d}(\mathcal{L}_X f)$, tedy

$$\boxed{\mathcal{L}_X \mathbf{d} = \mathbf{d}\mathcal{L}_X} . \quad (1.49)$$

5. Definujeme-li Lieovu závorku vektorových polí vztahem¹⁴

$$\boxed{[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] \equiv \mathbf{X}\mathbf{Y} - \mathbf{Y}\mathbf{X}} , \quad (1.50)$$

pak platí

$$\boxed{\mathcal{L}_X \mathbf{Y} = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}]} . \quad (1.51)$$

Ukazuje se, že vektorová pole mají strukturu *Lieovy algebry*, tedy že:

$$[c_1 \mathbf{X}_1 + c_2 \mathbf{X}_2, \mathbf{Y}] = c_1 [\mathbf{X}_1, \mathbf{Y}] + c_2 [\mathbf{X}_2, \mathbf{Y}] , \quad (1.52)$$

$$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}] = -[\mathbf{Y}, \mathbf{X}] , \quad (1.53)$$

$$[[\mathbf{X}, \mathbf{Y}], \mathbf{Z}] + [[\mathbf{Y}, \mathbf{Z}], \mathbf{X}] + [[\mathbf{Z}, \mathbf{X}], \mathbf{Y}] = 0 . \quad (1.54)$$

¹⁴Zápis $\mathbf{X}\mathbf{Y} - \mathbf{Y}\mathbf{X}$ má význam komutátorů operátorů daných vektory \mathbf{X} a \mathbf{Y} , tedy pro libovolnou funkci f platí $(\mathbf{X}\mathbf{Y} - \mathbf{Y}\mathbf{X})(f) = \mathbf{X}(\mathbf{Y}(f)) - \mathbf{Y}(\mathbf{X}(f))$.

6. Explicitní vyjádření ve složkách je

$$\mathcal{L}_{\mathbf{x}}\mathbf{Y} = \left(X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad (1.55)$$

$$\mathcal{L}_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\alpha} = \left(X^j \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} + \alpha_j \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) \mathbf{d}x^i. \quad (1.56)$$

Důkaz:

1. Tvrzení plyne ze vztahu (1.42), neboť užitím (1.29) a (1.39) je $\mathcal{L}_{\mathbf{x}}f = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [f(\gamma(t_0+t)) - f(\gamma(t_0))]$, což je opravdu derivace funkce f ve směru \mathbf{X} .
2. Vztahy dostaneme rozpisem podle definic (1.42), (1.43) a (1.44).
3. Důkaz plyne z definice užitím vztahu $\langle \tilde{\boldsymbol{\alpha}}, \tilde{\mathbf{Y}} \rangle = \widetilde{\langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{Y} \rangle}$. Ten vyjadřuje skutečnost, že pokud $f = \langle \boldsymbol{\alpha}, \mathbf{Y} \rangle$, pak $\tilde{f} = \langle \tilde{\boldsymbol{\alpha}}, \tilde{\mathbf{Y}} \rangle$, kde všechny veličiny ve druhém výrazu jsou příslušné Lieovsky přenesené veličiny z prvního výrazu, což plyne z (1.33).
4. Lze dokázat z definice Lieovy derivace funkce (1.42).
5. Abychom ukázali platnost rovnice (1.51), využijeme vztahu (1.48) aplikovaného na $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{d}f$, tedy na 1-formu, která je diferenciálem funkce f . Platí

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{d}f, \mathcal{L}_{\mathbf{x}}\mathbf{Y} \rangle &= \mathcal{L}_{\mathbf{x}}\langle \mathbf{d}f, \mathbf{Y} \rangle - \langle \mathcal{L}_{\mathbf{x}}\mathbf{d}f, \mathbf{Y} \rangle = \mathcal{L}_{\mathbf{x}}\langle \mathbf{d}f, \mathbf{Y} \rangle - \langle \mathbf{d}\mathcal{L}_{\mathbf{x}}f, \mathbf{Y} \rangle = \\ &= \mathcal{L}_{\mathbf{x}}\mathbf{Y}(f) - \langle \mathbf{d}\mathbf{X}(f), \mathbf{Y} \rangle = \mathbf{X}(\mathbf{Y}(f)) - \mathbf{Y}(\mathbf{X}(f)) = \\ &= (\mathbf{X}\mathbf{Y} - \mathbf{Y}\mathbf{X})(f) \end{aligned} \quad (1.57)$$

a opětovným užitím (1.13) také

$$\langle \mathbf{d}f, \mathcal{L}_{\mathbf{x}}\mathbf{Y} \rangle = (\mathcal{L}_{\mathbf{x}}\mathbf{Y})(f). \quad (1.58)$$

Porovnáním vztahů (1.57) a (1.58) dostáváme

$$\mathcal{L}_{\mathbf{x}}\mathbf{Y} = \mathbf{X}\mathbf{Y} - \mathbf{Y}\mathbf{X} = [\mathbf{X}, \mathbf{Y}], \quad (1.59)$$

čímž je důkaz hotov.

6. První vztah dokážeme tak, že levou stranou (1.55) působíme na funkci f . Dále postupujeme rozepsáním podle (1.51), (1.50), přechodem ke složkám v souřadnicové bázi a přeznačením sčítacích indexů. Odmyslíme-li si nakonec funkci f , dostáváme požadovaný vztah:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{\mathbf{x}}\mathbf{Y})(f) &= \mathbf{X}(\mathbf{Y}(f)) - \mathbf{Y}(\mathbf{X}(f)) = X^i \frac{\partial}{\partial x^i} \left(Y^j \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) - Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \left(X^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \right) = \\ &= X^i Y^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} + X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} - Y^j X^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^i} = \\ &= \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} \right) f = \left(X^j \frac{\partial Y^i}{\partial x^j} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \right) \frac{\partial f}{\partial x^i}. \end{aligned} \quad (1.60)$$

Při důkazu (1.56) postupujeme opět rozepsáním do složek a přeznačením sčítacích indexů:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\alpha} &= \mathcal{L}_{\mathbf{x}}(\alpha_i \mathbf{d}x^i) = (\mathcal{L}_{\mathbf{x}}\alpha_i) \mathbf{d}x^i + \alpha_i \mathcal{L}_{\mathbf{x}}\mathbf{d}x^i = (\mathcal{L}_{\mathbf{x}}\alpha_i) \mathbf{d}x^i + \alpha_i \mathbf{d}(\mathcal{L}_{\mathbf{x}}x^i) = \\ &= X^j \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} \mathbf{d}x^i + \alpha_i \mathbf{d} \left(X^j \frac{\partial x^i}{\partial x^j} \right) = X^j \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} \mathbf{d}x^i + \alpha_j \mathbf{d}X^j = \\ &= \left(X^j \frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} + \alpha_j \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \right) \mathbf{d}x^i. \end{aligned} \quad (1.61)$$

☒

1.7 Diferenciální 2-formy a jejich vztah k 1-formám

Definice: 1-forma α je lineární zobrazení: vektor $\mathbf{X} \rightarrow$ číslo $\alpha(\mathbf{X})$, viz (1.7).

Definice: 2-forma ω je bilineární antisymetrické zobrazení: dvojice vektorů $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \rightarrow$ číslo $\omega(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$, neboli¹⁵

$$\omega(\mathbf{Y}, c_1 \mathbf{X}_1 + c_2 \mathbf{X}_2) = c_1 \omega(\mathbf{Y}, \mathbf{X}_1) + c_2 \omega(\mathbf{Y}, \mathbf{X}_2) , \quad (1.62)$$

$$\omega(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = -\omega(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) , \quad \Rightarrow \text{pro } \mathbf{Y} = \mathbf{X} \text{ platí :} \quad (1.63)$$

$$\omega(\mathbf{X}, \mathbf{X}) \equiv 0 . \quad (1.64)$$

Složky ω v lokální souřadnicové bázi $(\frac{\partial}{\partial z^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial z^{2n}})$ jsou sadou čísel¹⁶

$$\omega_{\alpha\beta} \equiv \omega \left(\frac{\partial}{\partial z^\alpha}, \frac{\partial}{\partial z^\beta} \right) . \quad (1.65)$$

Zjevně platí:

$$\omega(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) \equiv \omega \left(Y^\alpha \frac{\partial}{\partial z^\alpha}, X^\beta \frac{\partial}{\partial z^\beta} \right) = \omega_{\alpha\beta} Y^\alpha X^\beta , \quad (1.66)$$

přičemž $\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha}$ v důsledku (1.63).

Vztah 2-forma \rightarrow 1-forma:

- operace $i_{\mathbf{X}}$ neboli vložení vektoru \mathbf{X} do formy

Definice:

Pro 1-formu $\alpha(\bullet)$ a vektor \mathbf{X} definujeme

$$\boxed{i_{\mathbf{X}} \alpha = \alpha(\mathbf{X})} \dots \text{0-forma (funkce)} , \quad (1.67)$$

tj. číslo totožné s kontrakcí $\langle \alpha, X \rangle$.

Pro 2-formu $\omega(\bullet, \bullet)$ a vektor \mathbf{X} definujeme

$$\boxed{i_{\mathbf{X}} \omega(\bullet) = \omega(\bullet, \mathbf{X})} \dots \text{1-forma} , \quad (1.68)$$

čekající na vektor \mathbf{Y} , která po jeho dosazení za \bullet dá příslušné číslo $\omega(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$. Ve složkách vzhledem k souřadnicím z^α platí

$$i_{\mathbf{X}} \alpha = \alpha_\beta X^\beta \quad (1.69)$$

$$(i_{\mathbf{X}} \omega)_\alpha = \omega_{\alpha\beta} X^\beta , \quad (1.70)$$

kde

$$i_{\mathbf{X}} \omega = (i_{\mathbf{X}} \omega)_\alpha \mathbf{d}z^\alpha . \quad (1.71)$$

Je tedy

$$i_{\mathbf{Y}} i_{\mathbf{X}} \omega(\bullet, \bullet) \equiv \omega_{\alpha\beta} Y^\alpha X^\beta = \omega(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) . \quad (1.72)$$

¹⁵Zavádíme jen antisymetrické 2-formy, a proto zde pro ně užíváme jen zkrácené označení „2-forma“.

¹⁶Řecké indexy $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ nabývají hodnot $1, 2, \dots, 2n$ odpovídající souřadnicím $(z^1, z^2, \dots, z^{2n})$ v Hamiltonově formalismu (viz kapitola 3).

Vztahy 1-forma \rightarrow 2-forma:

- operace vnější součin \wedge

Definice: $\alpha \wedge \beta$ je 2-forma vzniklá z 1-forem α a β vztahem

$$\boxed{\alpha \wedge \beta \equiv \alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha,} \quad (1.73)$$

kde symbol \otimes značí tenzorový součin. Jinými slovy, při působení na vektory \mathbf{Y} , \mathbf{X} je

$$(\alpha \wedge \beta)(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) = \alpha(\mathbf{Y})\beta(\mathbf{X}) - \beta(\mathbf{Y})\alpha(\mathbf{X}) \equiv \langle \alpha, \mathbf{Y} \rangle \langle \beta, \mathbf{X} \rangle - \langle \beta, \mathbf{Y} \rangle \langle \alpha, \mathbf{X} \rangle. \quad (1.74)$$

- je to zjevně bilineární antisymetrické zobrazení, tedy 2-forma
- evidentně platí, že

$$\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha, \quad (1.75)$$

$$i_{\mathbf{x}}(\alpha \wedge \beta) = (\alpha \wedge \beta)(\bullet, \mathbf{X}) = \alpha(\bullet)\beta(\mathbf{X}) - \beta(\bullet)\alpha(\mathbf{X}). \quad (1.76)$$

Ve složkách:

- (dz^α) ... tvoří bázi všech 1-forem
- $(dz^\alpha \wedge dz^\beta)$... tvoří bázi všech 2-forem, neboli lze vyjádřit

$$\omega = \frac{1}{2!} \omega_{\alpha\beta} dz^\alpha \wedge dz^\beta = \sum_{\alpha < \beta} \omega_{\alpha\beta} dz^\alpha \wedge dz^\beta, \quad (1.77)$$

takže

$$\begin{aligned} \omega(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) &= \frac{1}{2} \omega_{\alpha\beta} (dz^\alpha \otimes dz^\beta - dz^\beta \otimes dz^\alpha)(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) = \\ &= \frac{1}{2} \omega_{\alpha\beta} (dz^\alpha(\mathbf{Y}) \otimes dz^\beta(\mathbf{X}) - dz^\beta(\mathbf{Y}) \otimes dz^\alpha(\mathbf{X})) = \\ &= \frac{1}{2} (\omega_{\alpha\beta} \mathbf{Y}^\alpha \mathbf{X}^\beta - \omega_{\alpha\beta} \mathbf{Y}^\beta \mathbf{X}^\alpha) = \omega_{\alpha\beta} \mathbf{Y}^\alpha \mathbf{X}^\beta, \end{aligned} \quad (1.78)$$

což je konzistentní s (1.66).

- operace vnější derivace d

Jedná se o zobecnění diferenciálu funkce

$$\boxed{f \Rightarrow df = \frac{\partial f}{\partial z^\mu} dz^\mu.} \quad (1.79)$$

Definice: vnější derivace pole 1-forem je pole 2-forem dané vlastnostmi

$$d(\alpha + \beta) = d\alpha + d\beta, \quad (1.80)$$

$$d(f\beta) = (df) \wedge \beta + f d\beta, \quad (1.81)$$

$$d^2 = 0. \quad (1.82)$$

Speciálně pro $\alpha = f d\mathbf{g}$ tedy je $d\alpha = df \wedge d\mathbf{g}$. Existenci a jednoznačnost takto definované operace nejlépe vidíme ve složkách. Pomocí (1.80), (1.81) a (1.79) snadno dokážeme, že

$$\boxed{\alpha = \alpha_\mu dz^\mu \Rightarrow d\alpha = \frac{\partial \alpha_\mu}{\partial z^\kappa} dz^\kappa \wedge dz^\mu.} \quad (1.83)$$

Všimněme si, že pro $\alpha = df = \frac{\partial f}{\partial z^\mu} dz^\mu$ odtud dostáváme $d\alpha = \frac{\partial^2 f}{\partial z^\kappa \partial z^\mu} dz^\kappa \wedge dz^\mu = 0$, neboť člen $\frac{\partial^2 f}{\partial z^\kappa \partial z^\mu}$ je symetrický v κ a μ , zatímco člen $dz^\kappa \wedge dz^\mu$ je antisymetrický. Vlastnost $d^2 f$ zavedená v (1.82) tedy odpovídá záměnnosti smíšených parciálních derivací funkce f .

Obdobně lze definovat také 3-formy a zobecnit vnější derivaci na 2-formy tak, že platí

$$d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta - \alpha \wedge (d\beta). \quad (1.84)$$

Na závěr ještě uveďme významnou identitu, která dává do souvislosti Lieovu a vnější derivaci.

Cartanova identita

$$\boxed{\mathcal{L}_{\mathbf{X}} = i_{\mathbf{X}} \mathbf{d} + \mathbf{d} i_{\mathbf{X}}.} \quad (1.85)$$

Důkaz: Nechtě p, q jsou libovolné funkce, potom

- pro 1-formy $\alpha = p \mathbf{d}q$:

Aplikujme Lieovu derivaci $\mathcal{L}_{\mathbf{X}}$ na 1-formu α a poté užitme Leibnizova pravidla pro derivaci součinu, záměnost Lieovy derivace a diferenciálu funkce viz (1.49) a definici diferenciálu funkce viz (1.13):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{X}} \alpha &= \mathcal{L}_{\mathbf{X}}(p \mathbf{d}q) = (\mathcal{L}_{\mathbf{X}} p) \mathbf{d}q + p(\mathcal{L}_{\mathbf{X}} \mathbf{d}q) = \\ &= (\mathbf{X}(p)) \mathbf{d}q + p \mathbf{d}(\mathbf{X}(q)) = \langle \mathbf{d}p, \mathbf{X} \rangle \mathbf{d}q + p \mathbf{d}(\langle \mathbf{d}q, \mathbf{X} \rangle). \end{aligned} \quad (1.86)$$

K takto vzniklému výrazu přičtíme a současně odečtíme výraz $\langle \mathbf{d}q, \mathbf{X} \rangle \mathbf{d}p$ a následně užitme definice vnějšího součinu po vložení \mathbf{X} , tedy $(\mathbf{d}p \wedge \mathbf{d}q)(\mathbf{X}, \bullet)$, viz (1.76) a vztahů $\langle p \mathbf{d}q, \mathbf{X} \rangle = i_{\mathbf{X}}(p \mathbf{d}q)$ a $\mathbf{d}p \wedge \mathbf{d}q = \mathbf{d}(p \mathbf{d}q)$. Tedy

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{X}} \alpha &= \langle \mathbf{d}p, \mathbf{X} \rangle \mathbf{d}q - \langle \mathbf{d}q, \mathbf{X} \rangle \mathbf{d}p + (\mathbf{d}p) \langle \mathbf{d}q, \mathbf{X} \rangle + p \mathbf{d}(\langle \mathbf{d}q, \mathbf{X} \rangle) = \\ &= i_{\mathbf{X}}(\mathbf{d}p \wedge \mathbf{d}q) + \mathbf{d}(p \langle \mathbf{d}q, \mathbf{X} \rangle) = (i_{\mathbf{X}} \mathbf{d} + \mathbf{d} i_{\mathbf{X}})(p \mathbf{d}q) = (i_{\mathbf{X}} \mathbf{d} + \mathbf{d} i_{\mathbf{X}}) \alpha. \end{aligned} \quad (1.87)$$

- pro 2-formy tvaru $\omega = \mathbf{d}p \wedge \mathbf{d}q$:

Provedením obdobných úprav, užitím (1.87) a uvážením identity $\mathbf{d}^2 \equiv 0$, viz (1.82), spočteme

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{X}} \omega &= \mathcal{L}_{\mathbf{X}}(\mathbf{d}p \wedge \mathbf{d}q) = \mathcal{L}_{\mathbf{X}}(\mathbf{d}(p \mathbf{d}q)) = \mathbf{d}(\mathcal{L}_{\mathbf{X}}(p \mathbf{d}q)) = \\ &= \mathbf{d}(i_{\mathbf{X}} \mathbf{d}(p \mathbf{d}q) + \mathbf{d} i_{\mathbf{X}}(p \mathbf{d}q)) = \mathbf{d} i_{\mathbf{X}}(\mathbf{d}p \wedge \mathbf{d}q) + \mathbf{d}^2 i_{\mathbf{X}}(p \mathbf{d}q) = \\ &= \mathbf{d} i_{\mathbf{X}} \omega = (i_{\mathbf{X}} \mathbf{d} + \mathbf{d} i_{\mathbf{X}}) \omega, \end{aligned} \quad (1.88)$$

protože

$$i_{\mathbf{X}} \mathbf{d} \omega = i_{\mathbf{X}} \mathbf{d}(\mathbf{d}p \wedge \mathbf{d}q) = i_{\mathbf{X}}(\mathbf{d}^2 p \wedge \mathbf{d}q - \mathbf{d}p \wedge \mathbf{d}^2 q) = 0. \quad (1.89)$$

- pro obecné 2-formy $\psi = f_j \omega_j$:

Díky linearitě a vztahu (1.88) platí

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{X}} \psi &= (\mathcal{L}_{\mathbf{X}} f_j) \omega_j + f_j \mathcal{L}_{\mathbf{X}} \omega_j = (i_{\mathbf{X}} \mathbf{d} f_j) \omega_j + f_j (i_{\mathbf{X}} \mathbf{d} \omega_j + \mathbf{d} i_{\mathbf{X}} \omega_j) = \\ &= (i_{\mathbf{X}} \mathbf{d} f_j) \omega_j - (\mathbf{d} f_j) \wedge i_{\mathbf{X}} \omega_j + (\mathbf{d} f_j) \wedge i_{\mathbf{X}} \omega_j + f_j \mathbf{d} i_{\mathbf{X}} \omega_j = \\ &= i_{\mathbf{X}}[\mathbf{d}(f_j \omega_j)] + \mathbf{d}(f_j i_{\mathbf{X}} \omega_j) = (i_{\mathbf{X}} \mathbf{d} + \mathbf{d} i_{\mathbf{X}}) \psi. \end{aligned} \quad (1.90)$$

☒

Kapitola 2

Geometrická formulace Lagrangeovy mechaniky

V této kapitole ukážeme, že přirozenou arénou Lagrangeovy mechaniky je tečný bandl TQ konfigurační variety Q , a že dynamický vývoj je určen vektorovým polem \mathbf{X} , které řeší Lagrangeovy rovnice v geometrickém tvaru $\mathcal{L}_x \theta_L = dL$. Integrální křivky $\gamma(t)$ tohoto pole určují fázový portrét daného systému. Zformulujeme a dokážeme významný teorém Emmy Noetherové, který dává do souvislosti symetrie Lagrangeovy funkce a zákony zachování.

2.1 Fázový portrét: dynamický systém coby vektorové pole

Fázový portrét je znázornění možného vývoje systému v grafu rychlost versus poloha, tedy $v(x)$. Prostor parametrů (x, v) nazýváme též „rychlostní fázový prostor“.

- jedná se o množinu křivek $\gamma(t)$: každým nesusingulárním bodem prochází právě jedna křivka
- každá křivka je jednoznačně určena počátečními podmínkami (x_0, v_0)
- bod v rychlostním fázovém prostoru (x, v) určuje fyzikální stav systému

Zmíněné křivky $\gamma(t)$ vývoje systému lze chápat jako *integrální křivky* speciálního vektorového pole \mathbf{X} , které nazýváme dynamické vektorové pole. To je (pro případ $n = 1$) určeno výrazem

$$\mathbf{X} = \frac{d}{dt} = v \frac{\partial}{\partial x} + a \frac{\partial}{\partial v}, \quad (2.1)$$

kde v je okamžitá rychlost a a je zrychlení částice, jež je v konkrétním případě určeno Newtonovou pohybovou rovnicí $ma = F$.

Ve smyslu operátoru aplikovaného na libovolnou funkci f tedy platí

$$\mathbf{X}(f) \equiv \frac{df}{dt} = v \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{F}{m} \frac{\partial f}{\partial v}, \quad (2.2)$$

takže složky dynamického vektorového pole v rychlostním fázovém prostoru s nezávislými souřadnicemi x, v jsou $\mathbf{X} = (v, \frac{F}{m})$. Odtud lze určit integrální křivky $\gamma(t)$ řešením soustavy rovnic

$$\frac{dx^i}{dt} = X^i(x^k), \quad (2.3)$$

viz rovnice (1.28), kde souřadnice jsou $(x^1, x^2) \equiv (x, v)$. Explicitně tedy je

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad (2.4)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}. \quad (2.5)$$

Řešením soustavy (2.4), (2.5) dostáváme časový vývoj systému $x(t)$, $v(t)$ v rychlostním fázovém prostoru.

Příklad: *volný pád:* $F = mg$, takže (2.1) je

$$\mathbf{X} = v \frac{\partial}{\partial x} + g \frac{\partial}{\partial v}. \quad (2.6)$$

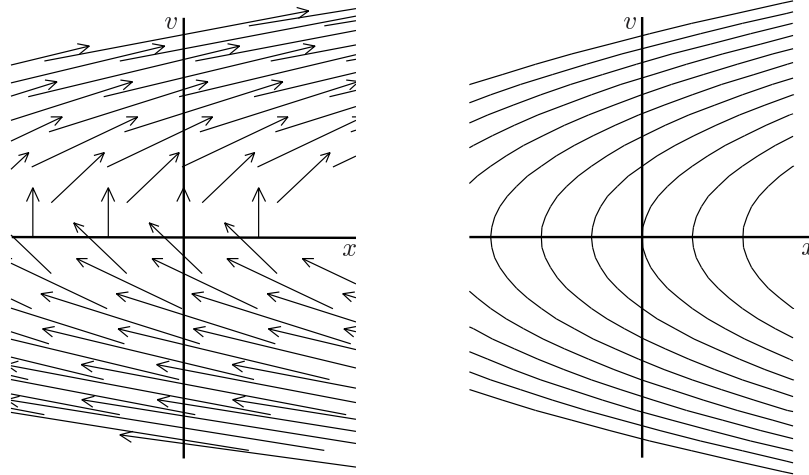
Integrální křivky fázového portréту jsou *paraboly*. Opravdu, řešení určené rovnicemi (2.4), (2.5) je

$$x = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + x_0, \quad v = gt + v_0, \quad (2.7)$$

(kde v_0 , x_0 jsou integrační konstanty) takže vyloučením t dostáváme

$$x = \frac{g}{2} \left(\frac{v - v_0}{g} \right)^2 + v_0 \left(\frac{v - v_0}{g} \right) + x_0 = \frac{1}{2g}v^2 + \left(x_0 - \frac{v_0^2}{2g} \right). \quad (2.8)$$

Fázový portrét je znázorněn na obrázku 2.1.



Obrázek 2.1: Dynamické vektorové pole a fázový portrét volného pádu.

Příklad: *harmonický oscilátor:* $F = -kx$, takže

$$\mathbf{X} = v \frac{\partial}{\partial x} - \omega^2 x \frac{\partial}{\partial v}, \quad \text{kde } \omega^2 = \frac{k}{m}. \quad (2.9)$$

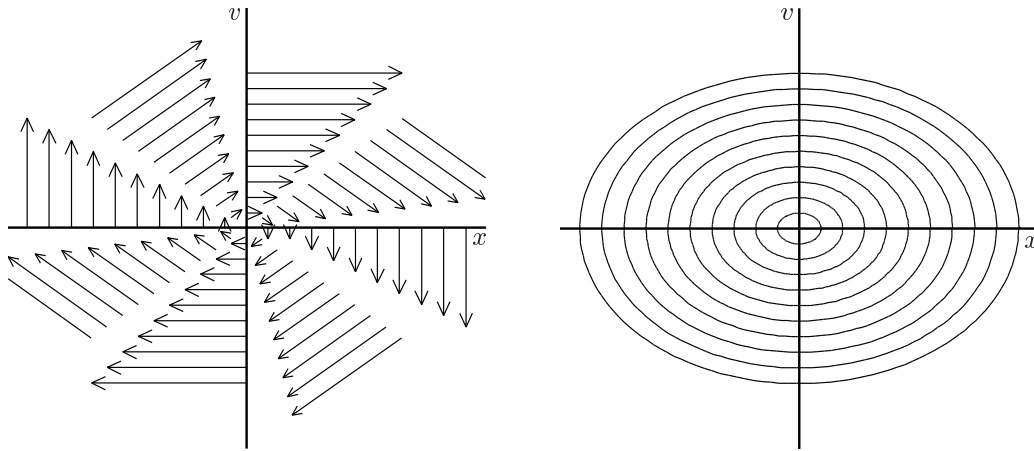
Integrální křivky jsou *elipsy*, tedy uzavřené křivky se singulárním bodem v $x = 0$, neboť řešení soustavy (2.4), (2.5) nyní je

$$x = A \cos(\omega t + \delta), \quad v = -A\omega \sin(\omega t + \delta), \quad (2.10)$$

(A , δ jsou konstanty) a vyloučením t opravdu dostáváme

$$\left(\frac{x}{A} \right)^2 + \left(\frac{v}{A\omega} \right)^2 = 1, \quad (2.11)$$

viz obrázek 2.2.

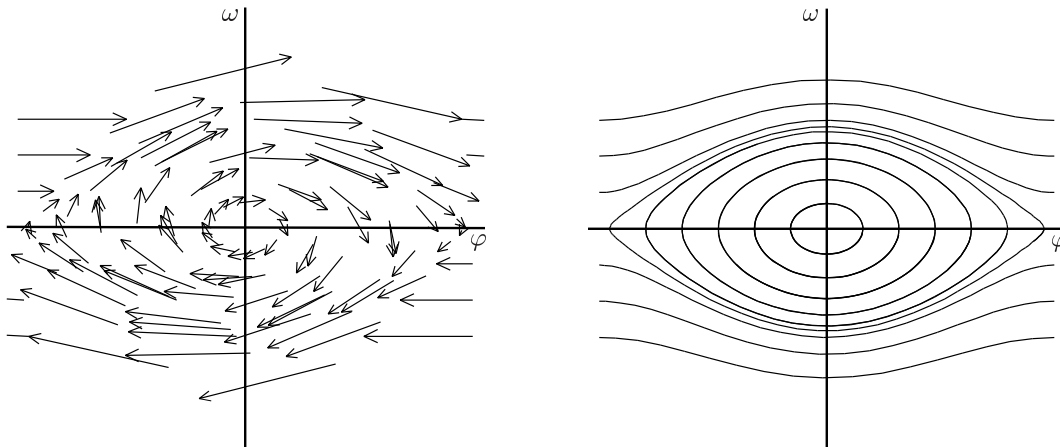


Obrázek 2.2: Dynamické vektorové pole a fázový portrét harmonického oscilátoru.

Příklad: *matematické kyvadlo:* $F = -mg \sin \varphi$. Rychlostní fázový prostor je nyní určen úhlovými parametry (φ, ω) , takže dynamické vektorové pole $\mathbf{X} = \omega \frac{\partial}{\partial \varphi} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \omega}$ má tvar

$$\mathbf{X} = \omega \frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{g}{l} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \omega}, \quad (2.12)$$

neboť pohybové rovnice určují, že úhlové zrychlení $\varepsilon = -\frac{g}{l} \sin \varphi$. Fázový portrét je znázorněn na obrázku 2.3.



Obrázek 2.3: Dynamické vektorové pole a fázový portrét matematického kyvadla.

Závěr: Vidíme, že řešení úlohy v teoretické mechanice je možné převést na nalezení odpovídajícího (unikátního) dynamického vektorového pole \mathbf{X} v rychlostním fázovém prostoru. Pole \mathbf{X} je přitom geometrický objekt, který existuje *nezávisle na konkrétních souřadnicích* rychlostního fázového prostoru. Lze tedy v principu použít libovolné zobecněné souřadnice konfigurační variety. Ukážeme nyní, že pole \mathbf{X} je opravdu určeno geometricky, a to Lagrangeovými rovnicemi.

2.2 Základní geometrické objekty Lagrangeova formalismu

Výklad lagrangeovské mechaniky v jazyce diferenciální geometrie začneme definicí několika důležitých pojmů:

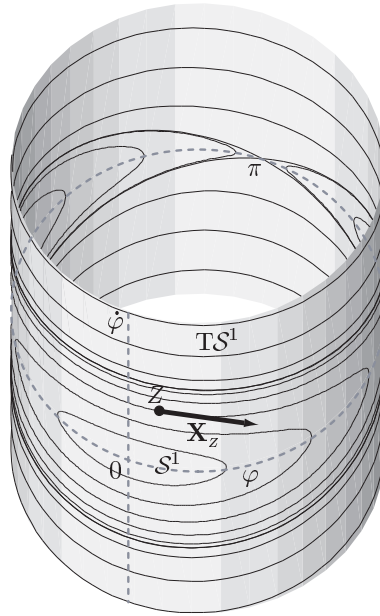
- konfigurační varieta \mathcal{Q} je varieta všech možných poloh (tvarů) daného systému parametrizovaná zobecněnými souřadnicemi (q^1, \dots, q^n) , přičemž n je počet stupňů volnosti systému
- tečný bandl $T\mathcal{Q}$, neboli *rychlostní fázový prostor*, je fibrovaná varieta dimenze $2n$ parametrizovaná souřadnicemi $(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$, kde q^1, \dots, q^n určují souřadnice konkrétního bodu P na varietě \mathcal{Q} a složky $\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n$ specifikují konkrétní vektor z tečného prostoru $T_P\mathcal{Q}$, neboli $\mathbf{v} = \dot{q}^j \frac{\partial}{\partial q^j}$ (zdůrazněme, že \dot{q}^j označuje souřadnice, nikoli časovou derivaci funkce)
- Lagrangeova funkce L je skalární funkce na tečném bandlu $T\mathcal{Q}$, tedy zobrazení¹ $L : T\mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}$
- dynamické vektorové pole $\mathbf{X} \equiv \frac{d}{dt}$ na $T\mathcal{Q}$ je vektorové pole, které je určeno Lagrangeovou funkcí L ; jeho integrální křivky $\gamma(t)$ určují fázový portrét, tj. udávají časový vývoj systému.

Ilustrace: *matematické kyvadlo*

Konfigurační varietou \mathcal{Q} matematického kyvadla je kružnice, tedy varieta \mathcal{S}^1 . Na jejím tečném bandlu $T\mathcal{Q} = T\mathcal{S}^1$ je definována Lagrangeova funkce L , která má v přirozených souřadnicích tvar $L(\varphi, \dot{\varphi})$ daný

$$L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi. \quad (2.13)$$

Ta jednoznačně určuje dynamické vektorové pole \mathbf{X} , neboli daným bodem $Z \in T\mathcal{S}^1$ prochází právě jedna integrální křivka s tečnou \mathbf{X}_Z odpovídající konkrétnímu vývoji, viz obrázek 2.4.



Obrázek 2.4: Integrální křivky na tečném bandlu $T\mathcal{S}^1$ matematického kyvadla.

Poznámka: Uvědomme si, že vektorové pole \mathbf{X} ve skutečnosti leží v tečném bandlu $T(T\mathcal{Q})$, nikoli přímo v $T\mathcal{Q}$. V případě matematického kyvadla tedy v $T(T\mathcal{S}^1)$. Proto je to hladký řez na $T(T\mathcal{Q})$.

¹Pokud je Lagrangeova funkce navíc také časově závislá, platí $L : T\mathcal{Q} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. (Pokud neexistuje potenciál V , jsou působící síly popsány 1-formami $\rho = F_i dx^i = Q_j dq^j$.)

2.3 Lagrangeovská vektorová pole na $T\mathcal{Q}$

Cílem lagrangeovského popisu je nalézt unikátní křivku $\delta(t)$ na konfigurační varietě \mathcal{Q} určující vývoj systému při daných počátečních podmínkách. Tuto křivku získáme projekcí π křivky $\gamma(t)$ ležící na varietě $T\mathcal{Q}$. Připomeňme, že tečný bandl $T\mathcal{Q}$ je fibrováný prostor s bází \mathcal{Q} (viz kapitola 1.3), a proto $\delta(t) = \pi(\gamma(t))$. V lokálních souřadnicích máme $\delta(t) \equiv (q^1(t), \dots, q^n(t))$ a $\gamma(t) \equiv (q^1(t), \dots, q^n(t), \dot{q}^1(t), \dots, \dot{q}^n(t))$.

V daném bodě $P \equiv \delta(t_0) \in \mathcal{Q}$ přitom tečna ke křivce $\delta(t)$ určuje rychlost systému popsanou vektorem $\mathbf{v} \in T_P\mathcal{Q}$, jenž má v souřadnicové bázi tvar $\mathbf{v} = v^j \frac{\partial}{\partial q^j} = \frac{dq^j}{dt}(t_0) \frac{\partial}{\partial q^j}$. Tím je ovšem jednoznačně určen odpovídající bod $Z \equiv \gamma(t_0) \in T\mathcal{Q}$, neboť obecně musí platit $\mathbf{v} = \dot{q}^j(t_0) \frac{\partial}{\partial q^j}$. Porovnáním obou vyjádření vektoru \mathbf{v} pro každou hodnotu parametru t_0 odtud dostáváme podmínky konzistence ve tvaru²

$$\boxed{\dot{q}^j(t) = \frac{dq^j(t)}{dt}}. \quad (2.14)$$

Pouze takové křivky $\gamma(t)$ na $T\mathcal{Q}$ splňující vztah (2.14) mohou konzistentně odpovídat příslušné křivce $\delta(t)$ na \mathcal{Q} — pak říkáme, že $\gamma(t)$ je „zdvihem“ $\delta(t)$, zatímco $\delta(t)$ je „projekcí“ $\gamma(t)$.

V Lagrangeově geometrickém formalismu se tedy musíme omezit jen na speciální dynamická vektorová pole \mathbf{X} na $T\mathcal{Q}$, aby jimi generované integrální křivky $\gamma(t)$ *automaticky* splňovaly podmínky (2.14). Protože obecně platí

$$\mathbf{X}(f) \equiv \frac{df}{dt} = \frac{dq^j(t)}{dt} \frac{\partial f}{\partial q^j} + \frac{d\dot{q}^j(t)}{dt} \frac{\partial f}{\partial \dot{q}^j}, \quad (2.15)$$

viz (1.4), omezení daná (2.14) implikují

$$\boxed{\mathbf{X} = \dot{q}^j \frac{\partial}{\partial q^j} + W^j(q^i, \dot{q}^i) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^j}}, \quad (2.16)$$

neboť jsme identifikovali

$$\frac{dq^j}{dt} = \dot{q}^j, \quad (2.17)$$

$$\frac{d\dot{q}^j}{dt} = W^j(q^i, \dot{q}^i). \quad (2.18)$$

Speciální vektorová pole³ tvaru (2.16) se nazývají *pole druhého řádu*. Dynamické vektorové pole v Lagrangeově popisu tedy musí být polem druhého řádu, aby dávalo konzistentní řešení pohybových rovnic. Rychlostní fázový prostor $T\mathcal{Q}$ má sice dimenzi $2n$, ale díky implicitní vazbě (2.14) implikující (2.16) se efektivně redukuje na n nezávislých proměnných konfigurační variety \mathcal{Q} .

Pro danou trajektorii $\delta(t) \equiv (q^1(t), \dots, q^n(t))$ na \mathcal{Q} díky (2.17), (2.18) platí $\frac{d^2 q^j}{dt^2} = \frac{d\dot{q}^j}{dt} = W^j$, takže funkce W^j vyjadřují složky okamžitého zrychlení systému. Dynamicky je toto zrychlení určeno pohybovými rovnicemi v zobecněných souřadnicích, tedy Lagrangeovými rovnicemi II. druhu, neboli $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0$, kde $L(q^j, \dot{q}^j)$ je příslušná Lagrangeova funkce. Explicitním rozpisem úplné časové derivace v prvním členu dostáváme

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} \frac{d\dot{q}^j}{dt} + \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i} \frac{dq^j}{dt} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0, \quad (2.19)$$

takže funkce W^j jsou řešením lineární soustavy rovnic

$$\boxed{A_{ji} W^j = C_i - B_{ji} \dot{q}^j}, \quad (2.20)$$

²Opět zdůrazněme koncepční rozdíl mezi funkcí $\dot{q}^j(t)$, souřadnicí \dot{q}^j a derivací $\frac{dq^j(t)}{dt}$ funkce $q^j(t)$.

³Připomeňme, že obecně (hladké) vektorové pole na $T\mathcal{Q}$ má tvar $\mathbf{X} = V^j \frac{\partial}{\partial q^j} + W^j \frac{\partial}{\partial \dot{q}^j}$, kde V^j a W^j jsou libovolné (hladké) funkce souřadnic q^i a \dot{q}^i . Pro pole druhého řádu je speciálně $V^j = \dot{q}^j$.

kde

$$A_{ji} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i}, \quad B_{ji} = \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i}, \quad C_i = \frac{\partial L}{\partial q^i}, \quad (2.21)$$

jsou funkce na TQ určené Lagrangeovou funkcí.⁴ Vektorová pole \mathbf{X} druhého řádu na TQ , tedy tvaru (2.16), kde funkce W^j jsou dány vztahem (2.20), nazýváme lagrangeovská vektorová pole. Integrovní křivky právě takových polí určují dynamiku soustavy v Lagrangeově formalizmu.

Poznámka: Vektorové pole \mathbf{X} druhého řádu lze definovat i v čistě geometrické řeči vztahem

$$\mathbf{S}(\mathbf{X}) = \mathbf{\Delta}, \quad (2.22)$$

kde \mathbf{S} je tzv. *vertikální endomorfismus* a $\mathbf{\Delta}$ je *Liouvillovo pole*, což jsou *kanonická tenzorová pole* na tečném bandlu $T\mathcal{M}$. Zde \mathbf{S} je vertikální lift⁵ jednotkového tenzoru typu $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, pro nějž platí

$$\mathbf{S}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial}{\partial v^j}, \quad \mathbf{S}\left(\frac{\partial}{\partial v^j}\right) = 0, \quad \mathbf{S}(\mathbf{d}x^j) = 0, \quad \mathbf{S}(\mathbf{d}v^j) = \mathbf{d}x^j, \quad (2.23)$$

a $\mathbf{\Delta}$ je specifické vertikální pole⁶, které má v lokálních souřadnicích tvar

$$\mathbf{\Delta} = v^j \frac{\partial}{\partial v^j}. \quad (2.24)$$

Aplikací (2.23) na vektorové pole v obecném tvaru

$$\mathbf{X} = V^j(x^i, v^i) \frac{\partial}{\partial x^j} + W^j(x^i, v^i) \frac{\partial}{\partial v^j} \quad (2.25)$$

dostáváme

$$\mathbf{S}(\mathbf{X}) = V^j(x^i, v^i) \frac{\partial}{\partial v^j}. \quad (2.26)$$

Je vidět, že geometrický vztah (2.22) implikuje $V^j = v^j$, a je tedy ekvivalentní soustavě

$$\frac{dx^j}{dt} = v^j, \quad \frac{dv^j}{dt} = W^j(x^i, v^i), \quad (2.27)$$

což odpovídá rovnicím (2.17) a (2.18).

2.4 Geometrická podoba Lagrangeových rovnic

Nyní můžeme přejít k otázce, jak nalézt zmíněné unikátní dynamické vektorové pole \mathbf{X} příslušné dané Lagrangeově funkci L na tečném bandlu TQ . Ukážeme, že toto pole musí splňovat rovnici

$$\boxed{\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\boldsymbol{\theta}_L = \mathbf{d}L}, \quad (2.28)$$

což je geometricky vyjádřená *Lagrangeova rovnice*, jejíž význam si nejprve ozřejmíme.

Levou stranu (2.28) tvoří Lieova derivace tzv. *Lagrangeovy 1-formy* podle námi hledaného vektorového pole \mathbf{X} (které musí být druhého řádu). *Lagrangeova 1-forma* je speciální 1-forma na TQ definovaná v lokálních zobecněných souřadnicích výrazem

$$\boxed{\boldsymbol{\theta}_L \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \mathbf{d}q^j}. \quad (2.29)$$

⁴Matice A je invertibilní když má nenulový determinant $\det A$ zvaný hessián; takový systém je nedegenerovaný.

⁵Vertikální lift je procedura, která z tenzorového pole typu $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ na \mathcal{M} vygeneruje tenzorové pole stejného typu na $T\mathcal{M}$. Více informací lze nalézt např. v [3], kapitola 17.5.

⁶Vertikálním polem nazýváme takové pole, které má pouze složky $\frac{\partial}{\partial v^j}$.

Všimněme si, že tato 1-forma, narozdíl od obecné 1-formy⁷, má pouze složky tvaru $\mathbf{d}q^j$. Striktně vzato, jedná se o pole 1-forem, které jsou řezem $T^*(TQ)$.

Důkaz platnosti rovnice (2.28). Uvažme Lieovu derivaci Lagrangeovy 1-formy podél obecného vektorového pole \mathbf{X} . Aplikací Leibnizova pravidla dostaneme

$$\mathcal{L}_{\mathbf{x}}\theta_L = \mathcal{L}_{\mathbf{x}}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\mathbf{d}q^j\right) = \left(\mathcal{L}_{\mathbf{x}}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\right)\mathbf{d}q^j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\mathcal{L}_{\mathbf{x}}(\mathbf{d}q^j). \quad (2.30)$$

Dále využijeme vztahu $\mathcal{L}_{\mathbf{x}}f \equiv \mathbf{X}(f) \equiv \frac{df}{dt}$, viz (1.45), a skutečnosti, že $\mathcal{L}_{\mathbf{x}}$ a \mathbf{d} komutují, viz (1.49),

$$\mathcal{L}_{\mathbf{x}}\theta_L = \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\right)\right]\mathbf{d}q^j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\mathbf{d}\left(\frac{dq^j}{dt}\right) = \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\right)\right]\mathbf{d}q^j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\mathbf{d}\dot{q}^j. \quad (2.31)$$

Nyní použijeme Lagrangeovy rovnice II. druhu v obvyklém souřadnicovém zápisu $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\right) = \frac{\partial L}{\partial q^j}$, které popisují dynamiku systému (viz přednáška OFY003). Díky nim ihned dostáváme

$$\mathcal{L}_{\mathbf{x}}\theta_L = \frac{\partial L}{\partial q^j}\mathbf{d}q^j + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\mathbf{d}\dot{q}^j = \mathbf{d}L, \quad (2.32)$$

kde v posledním kroku jsme použili výraz (1.18) pro diferenciál Lagrangeovy funkce $L(q^j, \dot{q}^j)$. Tím jsme ověřili platnost vztahu (2.28) reprezentujícího Lagrangeovy rovnice v čistě geometrické řeči, tedy jako vztahu mezi geometrickými objekty na TQ , jenž je zcela nezávislý na souřadnicích. \square

Připomeňme znovu význam rovnice (2.28): pro zadanou Lagrangeovu funkci L (určující jak 1-formu θ_L , tak 1-formu $\mathbf{d}L$) hledáme takové unikátní vektorové pole \mathbf{X} druhého řádu, aby platil vztah (2.28). Integrální křivky $\gamma(t)$ takového pole \mathbf{X} pak určují fyzikální vývoj daného systému.

Ilustrace: pohyb částice v potenciálu $V(q)$ v jedné dimenzi

Lagrangeova funkce má tvar

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - V(q) \quad (2.33)$$

a pro Lagrangeovu formu (2.29) tedy platí

$$\theta_L = m\dot{q}\mathbf{d}q. \quad (2.34)$$

Dále je

$$\mathbf{d}L = -V'\mathbf{d}q + m\dot{q}\mathbf{d}\dot{q}. \quad (2.35)$$

Naším cílem je nyní najít pole

$$\mathbf{X} = X^1\frac{\partial}{\partial q} + X^2\frac{\partial}{\partial \dot{q}}, \quad (2.36)$$

takové aby platilo (2.28), přičemž $X^1 = \dot{q}$ a funkci $X^2(q, \dot{q})$ hledáme. Obecně platí (1.56), tedy

$$\mathcal{L}_{\mathbf{x}}\alpha = \left(X^j\frac{\partial \alpha_i}{\partial x^j} + \alpha_j\frac{\partial X^j}{\partial x^i}\right)\mathbf{d}x^i, \quad (2.37)$$

kde nyní $\alpha = \theta_L$, takže pro $(x^1, x^2) = (q, \dot{q})$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) = (m\dot{q}, 0)$ je

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{x}}\theta_L &= \left(X^1\frac{\partial \alpha_1}{\partial q} + X^2\frac{\partial \alpha_1}{\partial \dot{q}} + \alpha_1\frac{\partial X^1}{\partial q} + \alpha_2\frac{\partial X^2}{\partial q}\right)\mathbf{d}q + \\ &\quad \left(X^1\frac{\partial \alpha_2}{\partial q} + X^2\frac{\partial \alpha_2}{\partial \dot{q}} + \alpha_1\frac{\partial X^1}{\partial \dot{q}} + \alpha_2\frac{\partial X^2}{\partial \dot{q}}\right)\mathbf{d}\dot{q} \\ &= \left(mX^2 + m\dot{q}\frac{\partial X^1}{\partial q}\right)\mathbf{d}q + m\dot{q}\frac{\partial X^1}{\partial \dot{q}}\mathbf{d}\dot{q}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

⁷Připomeňme, že obecná 1-forma na TQ má tvar $\alpha = \alpha_1\mathbf{d}q^1 + \dots + \alpha_n\mathbf{d}q^n + \beta_1\mathbf{d}\dot{q}^1 + \dots + \beta_n\mathbf{d}\dot{q}^n$.

Porovnáním s \mathbf{dL} z výrazu (2.35) již můžeme snadno vyjádřit obě složky hledaného vektorového pole \mathbf{X} , neboť musí platit

$$\begin{aligned} X^2 + \dot{q} \frac{\partial X^1}{\partial q} &= -\frac{1}{m} V', \\ \frac{\partial X^1}{\partial \dot{q}} &= 1. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Protože $X^1 = \dot{q}$, je druhá rovnice identicky splněna a první rovnice přímo určuje X^2 :

$$\begin{aligned} X^1 &= \dot{q}, \\ X^2 &= -\frac{1}{m} V'. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Jako **speciální ilustrace** lze uvážit

- *volnou částici* Protože $V = 0$, $q = x$, je

$$\mathbf{X} = \dot{x} \frac{\partial}{\partial x} \quad (2.41)$$

a integrální křivky $\gamma(t)$ systému jsou dány diferenciálními rovnicemi

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= X^1 = \dot{x}, \\ \frac{d\dot{x}}{dt} &= X^2 = 0, \end{aligned} \quad (2.42)$$

jejichž integrací dostáváme

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v_0 = \text{konst.} \\ x &= v_0 t + x_0. \end{aligned} \quad (2.43)$$

- *volný pád* Potenciál je dán výrazem $V(x) = -mgx$, takže pole je dle (2.40) dáno

$$\mathbf{X} = \dot{x} \frac{\partial}{\partial x} + g \frac{\partial}{\partial \dot{x}}, \quad (2.44)$$

z něhož dále dostáváme diferenciální výrazy pro integrální křivky

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= X^1 = \dot{x}, \\ \frac{d\dot{x}}{dt} &= X^2 = g, \end{aligned} \quad (2.45)$$

jejichž řešením je

$$\begin{aligned} \dot{x} &= gt + v_0, \\ x &= \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + x_0. \end{aligned} \quad (2.46)$$

2.5 Teorém Emmy Noetherové

Předpokládejme, že na $T\mathcal{Q}$ jsou dány:

- L Lagrangeova funkce systému
- \mathbf{X} dynamické vektorové pole generující tok $\Phi_t^{\mathbf{X}}$
- \mathbf{Z} další vektorové pole generující tok $\Phi_\epsilon^{\mathbf{Z}}$.

Pole \mathbf{Z} na $T\mathcal{Q}$ odpovídá bodové transformaci na \mathcal{Q} , tedy zobrazení $q^j \rightarrow q'^k = q'^k(q^j, \epsilon)$.

Bodová transformace na \mathcal{Q} je generována vektorovým polem \mathbf{Z}_Q takovým, že $\frac{dq^k}{d\epsilon} = Z^k(q^j)$, neboli $Z^k = \frac{\partial q'^k}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0}$.

Ilustrace: translace v ose x o vzdálenost ϵ je $x' = x + \epsilon$, $y' = y$. Generátorem této translace je

$$\mathbf{Z}_Q = \frac{\partial}{\partial x}. \quad (2.47)$$

Ilustrace: rotace kolem počátku o úhel ϵ je $r' = r$, $\varphi' = \varphi + \epsilon$. Generátorem této rotace je

$$\mathbf{Z}_Q = \frac{\partial}{\partial \varphi}. \quad (2.48)$$

Vektorové pole $\mathbf{Z}_Q = Z^k \frac{\partial}{\partial q^k}$ „žije“ na \mathcal{Q} , zatímco pole \mathbf{Z} je jeho rozšířením na $T\mathcal{Q}$. Geometrický význam rozšíření pole \mathbf{Z}_Q na \mathbf{Z} spočívá v tom, že zatímco pole \mathbf{Z}_Q generuje tok Φ_ϵ na konfigurační varietě \mathcal{Q} , pole \mathbf{Z} generuje odpovídající tok $(\Phi_\epsilon, \Phi_{\epsilon*})$ na tečném bandlu $T\mathcal{Q}$, kde $\Phi_{\epsilon*}$ je příslušný push-forward tečného prostoru.

To znamená, že integrální křivky pole \mathbf{Z} jsou určeny $(q^j, \dot{q}^j) \rightarrow (q'_\epsilon, \dot{q}'_\epsilon) \equiv (\Phi_\epsilon(q^j), \Phi_{\epsilon*}(\dot{q}^j))$. Explicitní vyjádření pole \mathbf{Z} najdeme následujícím způsobem. Pole \mathbf{Z} musí být tvaru

$$\mathbf{Z} = Z^k \frac{\partial}{\partial q^k} + \dot{Z}^k \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k}. \quad (2.49)$$

Zadáním $Z^k(q^l)$, což jsou složky \mathbf{Z}_Q , jsou složky \dot{Z}^k již jednoznačně určeny. Musí totiž platit

$$\dot{Z}^k = \frac{d}{dt} Z^k(q^l(t)) = \frac{\partial Z^k}{\partial q^l} \dot{q}^l, \quad (2.50)$$

kde $q^l(t)$ je souřadnicové vyjádření libovolné křivky určující tečný vektor $v \in T_p \mathcal{Q}$ se složkami \dot{q}^l . (Výraz (2.51) odpovídá transformaci (1.35) složek vektoru pomocí zobrazení push-forward.) Pro \mathbf{Z} tedy dostáváme

$$\mathbf{Z} = Z^k \frac{\partial}{\partial q^k} + \frac{\partial Z^k}{\partial q^l} \dot{q}^l \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k}. \quad (2.51)$$

Nyní již můžeme teorém Emmy Noetherové formulovat, a to následujícím způsobem:

Teorém: Jestliže se hodnota Lagrangeovy funkce L nemění podél křivek \mathbf{Z} , neboli

$$\boxed{\mathcal{L}_{\mathbf{z}}L = 0}, \quad (2.52)$$

pak funkce g daná vztahem

$$\boxed{g = \langle \boldsymbol{\theta}_L, \mathbf{Z} \rangle} \quad (2.53)$$

má stále stejnou hodnotu podél křivek \mathbf{X} (tedy při vývoji systému), tj. platí

$$\boxed{\mathcal{L}_{\mathbf{x}}g = 0}, \quad (2.54)$$

což odpovídá definici *integrálu pohybu*.

Abychom mohli ukázat platnost vysloveného teorému, dokážeme nejprve pomocné tvrzení:

Lemma: Platí, že

$$\langle \boldsymbol{\theta}_L, [\mathbf{Z}, \mathbf{X}] \rangle = 0. \quad (2.55)$$

Důkaz lemmatu: Připomeňme, že vektorová pole \mathbf{X} a \mathbf{Z} jsou, viz (2.16) a (2.51),

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= \dot{q}^j \frac{\partial}{\partial q^j} + W^j \frac{\partial}{\partial \dot{q}^j}, \\ \mathbf{Z} &= Z^k \frac{\partial}{\partial q^k} + \frac{\partial Z^k}{\partial q^l} \dot{q}^l \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k}. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Také si uvědomme, že zde můžeme vynechat všechny členy tvaru $\frac{\partial}{\partial \dot{q}^k}$. Opravdu: protože $\boldsymbol{\theta}_L \sim \mathbf{d}q^j$, viz definice (2.29), platí

$$\langle \boldsymbol{\theta}_L, \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k} \rangle = 0, \quad (2.57)$$

takže členy tvaru $\frac{\partial}{\partial \dot{q}^k}$ jsou v rámci tohoto důkazu dále irelevantní. Počítejme nyní komutátor⁸

$$[\mathbf{Z}, \mathbf{X}] \equiv \mathbf{Z}\mathbf{X} - \mathbf{X}\mathbf{Z} \approx Z^k \frac{\partial \dot{q}^j}{\partial q^k} \frac{\partial}{\partial q^j} + \frac{\partial Z^k}{\partial q^l} \dot{q}^l \frac{\partial \dot{q}^j}{\partial \dot{q}^k} \frac{\partial}{\partial q^j} - \dot{q}^j \frac{\partial Z^k}{\partial q^j} \frac{\partial}{\partial q^k} - W^j \frac{\partial Z^k}{\partial \dot{q}^j} \frac{\partial}{\partial q^k}. \quad (2.58)$$

Ve výrazu (2.58) se nevyskytují členy obsahující druhé derivace, neboť se v komutátoru navzájem odečtou. Opravdu, obecně platí, že

$$\left[a \frac{\partial}{\partial x}, b \frac{\partial}{\partial y} \right] \equiv a \frac{\partial}{\partial x} b \frac{\partial}{\partial y} - b \frac{\partial}{\partial y} a \frac{\partial}{\partial x} = a \frac{\partial b}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} + ab \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - b \frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - ba \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \quad (2.59)$$

a členy s druhou derivací (2. a 4. člen) se tedy odečtou.

Výraz (2.58) můžeme dále upravit, uvědomíme-li si, že $\frac{\partial \dot{q}^j}{\partial q^k} = 0$, $\frac{\partial \dot{q}^j}{\partial \dot{q}^k} = \delta_k^j$ a $\frac{\partial Z^k}{\partial \dot{q}^j} = 0$, protože $Z^k(q^l)$. Je tedy

$$[\mathbf{Z}, \mathbf{X}] \approx \frac{\partial Z^k}{\partial q^l} \dot{q}^l \frac{\partial}{\partial q^k} - \dot{q}^j \frac{\partial Z^k}{\partial q^j} \frac{\partial}{\partial q^k}. \quad (2.60)$$

Nyní již stačí jen přeznačit sčítací index j v druhém členu za l a ihned vidíme, že $[\mathbf{Z}, \mathbf{X}] \approx 0$. Jak jsme tedy ukázali, komutátor $[\mathbf{Z}, \mathbf{X}]$ má obecně jenom komponenty $\frac{\partial}{\partial \dot{q}^k}$, a v důsledku (2.57) musí platit $\langle \boldsymbol{\theta}_L, [\mathbf{Z}, \mathbf{X}] \rangle = 0$, čímž je důkaz lemmatu dokončen.

☒

⁸Právě kvůli vynechání některých členů, které po zúžení s $\boldsymbol{\theta}_L$ vypadnou, píšeme znaménko \approx místo $=$.

Důkaz teoremu Emmy Noetherové: Konečně můžeme elegantně s využitím právě dokázaného lemmatu ukázat platnost teoremu, neboť užitím (1.48), Lagrangeových rovnic (2.28) a (1.51) je

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_x g &= \mathcal{L}_x \langle \boldsymbol{\theta}_L, \mathbf{Z} \rangle = \langle \mathcal{L}_x \boldsymbol{\theta}_L, \mathbf{Z} \rangle + \langle \boldsymbol{\theta}_L, \mathcal{L}_x \mathbf{Z} \rangle = \\ &= \langle \mathbf{d}L, \mathbf{Z} \rangle + \langle \boldsymbol{\theta}_L, [\mathbf{X}, \mathbf{Z}] \rangle = \mathbf{Z}(L) + 0 \equiv \mathcal{L}_z L = 0.\end{aligned}\quad (2.61)$$

□

Ilustrace: invariance L vůči translaci. Generátor translace je (2.47), tedy

$$\mathbf{Z}_Q = \frac{\partial}{\partial x} = \mathbf{Z}.\quad (2.62)$$

Například Lagrangeova funkce

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(y)\quad (2.63)$$

je vůči ní zřejmě invariantní, takže platí

$$g = \langle \boldsymbol{\theta}_L, \mathbf{Z} \rangle = \langle m\dot{x} \mathbf{d}x + m\dot{y} \mathbf{d}y, \frac{\partial}{\partial x} \rangle = m\dot{x}.\quad (2.64)$$

Rovnice (2.54) v tomto případě vyjadřuje *zákon zachování hybnosti*.

Ilustrace: invariance L vůči rotaci. Generátor rotace je (2.48), tedy

$$\mathbf{Z}_Q = \frac{\partial}{\partial \varphi} = \mathbf{Z}.\quad (2.65)$$

Například pro Lagrangeovu funkci tvaru

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r)\quad (2.66)$$

dostáváme

$$g = \langle \boldsymbol{\theta}_L, \mathbf{Z} \rangle = \langle m\dot{r} \mathbf{d}r + mr^2\dot{\varphi} \mathbf{d}\varphi, \frac{\partial}{\partial \varphi} \rangle = mr^2\dot{\varphi},\quad (2.67)$$

tedy teorem Emmy Noetherové implikuje *zachování momentu hybnosti*.

Je ilustrativní podívat se na tutéž situaci také z pohledu kartézských souřadnic. V nich je generátor rotace $x' = x \cos \epsilon - y \sin \epsilon$, $y' = x \sin \epsilon + y \cos \epsilon$ dán

$$\mathbf{Z}_Q = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x},\quad (2.68)$$

takže \mathbf{Z} již nemá stejný tvar jako \mathbf{Z}_Q :

$$\mathbf{Z} = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} + \dot{x} \frac{\partial}{\partial \dot{y}} - \dot{y} \frac{\partial}{\partial \dot{x}}.\quad (2.69)$$

Odtud pro $L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(x, y)$ dostáváme

$$g = \langle \boldsymbol{\theta}_L, \mathbf{Z} \rangle = \langle m\dot{x} \mathbf{d}x + m\dot{y} \mathbf{d}y, \mathbf{Z} \rangle = m(x\dot{y} - y\dot{x}),\quad (2.70)$$

což je opět zákon zachování momentu hybnosti, nyní ovšem vyjádřený v kartézských souřadnicích.

Kapitola 3

Geometrická formulace Hamiltonovy mechaniky

V této kapitole zjistíme, že přechod od Lagrangeovy k Hamiltonově formulaci mechaniky geometricky odpovídá Legendrově duální transformaci mezi tečným bandlem TQ a kotečným bandlem T^*Q konfigurační variety Q . Poté ukážeme, že přirozenou arénou Hamiltonovy mechaniky je fázový prostor, který je vybaven symplektickou strukturou, to znamená, že na něm existuje symplektická 2-forma ω . Hamiltonovy rovnice mají tvar $i_{\mathbf{X}}\omega = \mathbf{d}H$, což je geometrická rovnice pro hamiltonovské vektorové pole \mathbf{X} , jehož integrální křivky $\gamma(t)$ určují vývoj systému ve fázovém prostoru. Ukážeme také geometrický význam Poissonových závorek a kanonických transformací.

3.1 Legendreova duální transformace

Velmi stručně řečeno, z geometrického hlediska můžeme oba zásadní přístupy k mechanice — Lagrangeův a Hamiltonův — shrnout takto:

Lagrange: klíčová je funkce L na TQ , což je tečný bandl variety Q ,

Hamilton: klíčová je funkce H na T^*Q , což je kotečný bandl variety Q .

Oba fibrované prostory TQ a T^*Q jsou dobré nosiče dynamiky, neboť *separují trajektorie vývoje*, to znamená, že každým jejich bodem prochází právě jedna křivka vývoje $\gamma(t)$.

Přechod $\dot{q}^j \rightarrow p_j$, jak ho známe z klasických učebnic teoretické mechaniky, není pouhá “změna souřadnic“ na tečném bandlu TQ , ale je to (lokální souřadnicová) reprezentace zobrazení

$$TQ \rightarrow T^*Q, \quad (3.1)$$

tedy identifikace vektoru \mathbf{v} v bodě P (se složkami \dot{q}^j) s odpovídající 1-formou Θ v tomtéž bodě P (se složkami p_j).

Obecněji: záměna $L \leftrightarrow H$ odpovídá zobrazení $TQ \leftrightarrow T^*Q$ identifikující $\dot{q}^j \leftrightarrow p_j$ pomocí vztahů

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}, \quad \dot{q}^j = \frac{\partial H}{\partial p_j}. \quad (3.2)$$

Schematicky tedy platí

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R} & & \mathbb{R} \\
 \uparrow L & & \uparrow H \\
 (q^j, \dot{q}^j) = Z \in \mathbb{T}\mathcal{Q} & \longleftrightarrow & \mathbb{T}^*\mathcal{Q} \ni Z^* = (q^j, p_j) \\
 \searrow \pi & & \swarrow \pi \\
 (q^j) = P \in \mathcal{Q} & &
 \end{array}$$

Vztah $L(q^j, \dot{q}^j) \leftrightarrow H(q^j, p_j)$ je přitom explicitně dán známým výrazem (viz OFY003)

$$H(q^j, p_j) \equiv p_i \dot{q}^i(q^j, p_j) - \tilde{L}(q^j, p_j), \quad (3.3)$$

kde $\tilde{L}(q^j, p_j)$ je funkce $L(q^i, \dot{q}^i)$, v níž je dosazeno $\dot{q}^i(q^j, p_j)$ inverzí $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}$, viz (3.2).

Geometricky názorná interpretace vztahu mezi L a H

Pro jednoduchost uvažujme jen dimenzi $n = 1$ a potlačme psaní q (budeme však i nadále psát parciální derivace).

Mějme tedy libovolnou funkci $L(v)$ a po vzoru (3.3) zavedme novou funkci

$$H(p) = pv(p) - L(v(p)), \quad (3.4)$$

kde

$$p(v) = \frac{\partial L}{\partial v}. \quad (3.5)$$

Lagrangeův a Hamiltonův popis je pak ekvivalentní vyjádření téhož grafu, viz obrázek 3.1,

- buď dvojicí $(v, L) \equiv$ (vodorovná osa, svislá osa),
- nebo dvojicí $(p, H) \equiv$ („směrnice tečny“, „-absolutní člen tečny“).

Opravdu: obecná přímka je tvaru $y = kx + q$, zde tedy $L(v_0) = p_0 v_0 - H(p_0)$, neboli $H(p_0) = p_0 v_0 - L(v_0)$. Funkce $L(v)$ je proto *obalová křivka tečen* parametrizovaných dvojicí $(p, H(p))$.

Funkce $L(v)$ a $H(p)$ jsou ekvivalentní, neboť naopak platí

$$L(v) = p(v)v - H(p(v)). \quad (3.6)$$

Opravdu, z (3.4) plyne

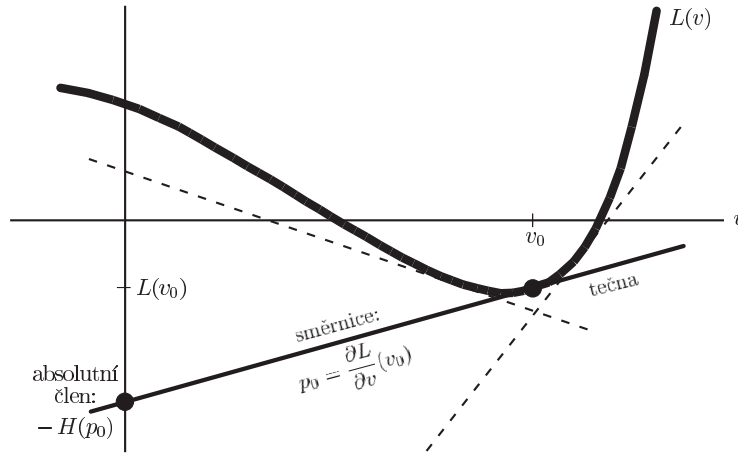
$$\frac{\partial H}{\partial p} = v(p) + p \frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial L}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial p}. \quad (3.7)$$

Protože ale $\frac{\partial L}{\partial v} = p$, dostáváme

$$v(p) = \frac{\partial H}{\partial p}. \quad (3.8)$$

Poznámky:

- přechod $L \leftrightarrow H$ daný vztahem (3.4) funguje dobře, dokud se v grafu neobjeví inflexní bod; je tedy regulární jen v bodech, kde $\frac{\partial p}{\partial v} = \frac{\partial^2 L}{\partial v^2} \neq 0$
- obecně lze Legendreovu transformaci (3.3) užít pokud je hessián $\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^i}\right) \neq 0$, viz také řešení rovnice (2.20)

Obrázek 3.1: Názorná ilustrace vztahu mezi L a H .**Další důsledky Legendreovy duality:**

Legendreovým obrazem Lagrangeovy 1-formy θ_L definované na TQ (přesněji $\theta_L \in T^*(TQ)$) vztahem (2.29), tedy

$$\theta_L = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} dq^j, \quad (3.9)$$

je významná Cartanova 1-forma θ_0 :

Definice: kanonická Cartanova 1-forma θ_0 na T^*Q (přesněji $\theta_0 \in T^*(T^*Q)$) je definována vztahem

$$\boxed{\theta_0 = p_j dq^j}. \quad (3.10)$$

Její geometrická důležitost spočívá v tom, že

- existuje globálně na celém T^*Q
- nezávisí na konkrétní funkci L
- je jednoznačně a přirozeně určena fibrovanou strukturou kotečného bandlu T^*Q

Podobně lze Legendreovu dualitu aplikovat i na integrální křivky dynamického vektorového pole $\mathbf{X} \equiv \frac{d}{dt}$ určují vývoj daného systému. V Lagrangeově formalismu na TQ je

$$\mathbf{X}_L = \dot{q}^j \frac{\partial}{\partial q^j} + W^j(q^i, \dot{q}^i) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^j}, \quad (3.11)$$

kde $W^j(q^i, \dot{q}^i)$ je kontrétní (obvykle složitá) funkce daná Lagrangeovými pohybovými rovnicemi viz (2.20). Naproti tomu ve formalismu Hamiltonově na T^*Q platí

$$\mathbf{X}_H = \frac{dq^j}{dt} \frac{\partial}{\partial q^j} + \frac{dp_j}{dt} \frac{\partial}{\partial p_j}, \quad (3.12)$$

kde $\frac{dq^j}{dt}$ a $\frac{dp_j}{dt}$ jsou určeny Hamiltonovými kanonickými rovnicemi $\frac{dq^j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}$ a $\frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^j}$, tedy

$$\boxed{\mathbf{X}_H = \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial}{\partial q^j} - \frac{\partial H}{\partial q^j} \frac{\partial}{\partial p_j}}. \quad (3.13)$$

Na T^*Q je proto vývoj systému určen trajektoriemi $(q^j(t), p_j(t))$, což jsou integrální křivky přirozeného vektorového pole $\mathbf{X}_H = \left(\frac{\partial H}{\partial p_j}, -\frac{\partial H}{\partial q^j}\right)$.

3.2 Jednotné souřadnice na T^*Q a symplektická matice

Je výhodné zavést jednotné značení lokálních souřadnic na kotečném bandlu T^*Q dimenze $2n$ vztahem

$$\boxed{(z^1, \dots, z^n, z^{n+1}, \dots, z^{2n}) \equiv (q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)}, \quad (3.14)$$

tedy

$$\begin{aligned} z^j &= q^j, \\ z^{j+n} &= p_j, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Prvních n parametrů představuje zobecněné souřadnice, zatímco druhá n -tice parametrů jsou odpovídající kanonicky sdružené hybnosti. Potom je možné Hamiltonovy kanonické rovnice přepsat do podoby

$$\dot{z}^\beta = \frac{\partial H}{\partial z^{\beta+n}}, \quad \beta = 1, \dots, n, \quad (3.16)$$

$$\dot{z}^\beta = -\frac{\partial H}{\partial z^{\beta-n}}, \quad \beta = n+1, \dots, 2n. \quad (3.17)$$

Oba výrazy jsou stejné až na znaménka. Nabízí se proto zavést tzv. symplektickou matici $\omega_{\alpha\beta}$ typu $2n \times 2n$, jejíž prvky jsou 0, +1 nebo -1 dle „blokového“ předpisu

$$\boxed{\omega_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}} \equiv \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -1 \\ 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

kde I je jednotková matice typu $n \times n$, $I = \text{diag}(1, \dots, 1)$. Inverzní matice k $\omega_{\alpha\beta}$ je zjevně

$$\boxed{\omega^{\beta\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}}, \quad (3.19)$$

neboť $\omega_{\alpha\beta}\omega^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma$, neboli

$$\begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Je vidět, že obě matice $\omega_{\alpha\beta}$ a $\omega^{\alpha\beta}$ jsou antisymetrické,

$$\omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha}, \quad \omega^{\alpha\beta} = -\omega^{\beta\alpha}, \quad (3.21)$$

a že jsou navzájem transponované.

Užitím jednotných souřadnic a symplektické matice mají Hamiltonovy kanonické rovnice (3.16), (3.17) na T^*Q jednotný tvar

$$\boxed{\omega_{\alpha\beta} \dot{z}^\beta = \frac{\partial H}{\partial z^\alpha}}, \quad (3.22)$$

neboli naopak

$$\dot{z}^\beta = \omega^{\beta\alpha} \frac{\partial H}{\partial z^\alpha}. \quad (3.23)$$

Snadno se přesvědčíme, že například $\alpha = 1 \Rightarrow \beta = n+1$, tedy $z^\beta = z^{n+1} = p_1$, takže

$$\omega_{1\beta} \dot{z}^\beta = \frac{\partial H}{\partial z^1} \Leftrightarrow -\dot{p}_1 = \frac{\partial H}{\partial q^1} \quad \text{atd.}$$

Podobně lze pomocí symplektické matice vyjádřit:

- dynamické vektorové pole (3.12), (3.13)

$$\mathbf{X}_H = \dot{z}^\beta \frac{\partial}{\partial z^\beta} = \omega^{\beta\alpha} \frac{\partial H}{\partial z^\alpha} \frac{\partial}{\partial z^\beta} \quad (3.24)$$

- Poissonovu závorku $\{f, g\} \equiv \frac{\partial f}{\partial q^j} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q^j}$

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial z^\beta} \omega^{\beta\alpha} \frac{\partial g}{\partial z^\alpha} \quad (3.25)$$

Speciálně pro $f = z^\beta$ a $g = z^\alpha$ dostáváme fundamentální Poissonovy závorky tj.

$$\{z^\beta, z^\alpha\} = \omega^{\beta\alpha}, \quad (3.26)$$

neboli v obvyklých kanonicky sdružených proměnných

$$\begin{aligned} \{q^j, q^k\} &= 0, & \{q^j, p_k\} &= \delta_k^j, \\ \{p_j, p_k\} &= 0, & \{p_j, q^k\} &= -\delta_j^k. \end{aligned} \quad (3.27)$$

3.3 Geometrická podoba Hamiltonových rovnic

Nyní postoupíme dále v geometrické formulaci Hamiltonovy mechaniky. Ukazuje se totiž, že symplektickou matici $\omega_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 0 \end{pmatrix}$ lze chápat jako souřadnicové složky symplektické 2-formy ω na kotečném bandlu $T^*\mathcal{Q}$. Právě tato symplektická forma ω tvoří centrální geometrický pojem hamiltonovského přístupu. (Zavedení obecných 2-forem je v kapitole 1.7.)

Definice: symplektická forma je 2-forma ω , která je

- uzavřená $\dots \mathbf{d}\omega = 0$
- nedegenerovaná $\dots i_{\mathbf{x}}\omega = 0 \Leftrightarrow \mathbf{X} = 0$

Přenásobením obou stran Hamiltonových kanonických rovnic (3.22) bázovou 1-formou $\mathbf{d}z^\alpha$ a vysčítáním přes α dostáváme vztah

$$\omega_{\alpha\beta} \dot{z}^\beta \mathbf{d}z^\alpha = \frac{\partial H}{\partial z^\alpha} \mathbf{d}z^\alpha, \quad (3.28)$$

kde $\omega_{\alpha\beta}$ jsou složky 2-formy ω , viz (1.65), a \dot{z}^β jsou složky dynamického vektorového pole \mathbf{X} příslušejícího H , viz (3.24). Jak je vidět z (1.70) a (1.71), celá levá strana odpovídá 1-formě, jež vzniká vložením dynamického vektorového pole \mathbf{X} do symplektické 2-formy ω . Pravá strana je 1-forma $\mathbf{d}H$, tedy diferenciál Hamiltonovy funkce. Vztah (3.28) vyjadřuje vztah mezi 1-formami, který můžeme oprostít od konkrétních souřadnic na $T^*\mathcal{Q}$.

Hamiltonovy kanonické rovnice v čistě geometrické řeči tedy mají velmi elegantní tvar

$$i_{\mathbf{x}}\omega = \mathbf{d}H. \quad (3.29)$$

Vyjádřeno slovy, vývoj systému je určen integrálními křivkami takového vektorového pole \mathbf{X} , které vložením do symplektické 2-formy ω dá právě diferenciál dané Hamiltonovy funkce.

3.4 Fázový prostor coby symplektická varieta

Nyní je klíčové si uvědomit, že na fázovém prostoru¹ je symplektická forma ω přirozeně definovaná, a to vztahem

$$\omega = \mathbf{d}\theta_0, \quad (3.30)$$

kde θ_0 je kanonická Cartanova forma, zavedená výrazem (3.10). Explicitně v souřadnicích na $T^*\mathcal{Q}$ tedy platí

$$\theta_0 = p_j \mathbf{d}q^j \quad (3.31)$$

$$\omega = \mathbf{d}p_j \wedge \mathbf{d}q^j \quad (3.32)$$

Ověření:

- uzavřenost ω plyne přímo z (3.30) a vlastnosti (1.82): $\mathbf{d}\omega = \mathbf{d}(\mathbf{d}\theta_0) = \mathbf{d}^2\theta_0 \equiv 0$
- z definice vnější derivace 1-formy plyne $\omega = \mathbf{d}\theta_0 = \mathbf{d}(p_j \mathbf{d}q^j) \equiv \mathbf{d}p_j \wedge \mathbf{d}q^j$
- ve složkách je (3.31) explicitně

$$\begin{aligned} \omega &= \mathbf{d}p_1 \wedge \mathbf{d}q^1 + \dots + \mathbf{d}p_n \wedge \mathbf{d}q^n = -\mathbf{d}q^1 \wedge \mathbf{d}p_1 - \dots - \mathbf{d}q^n \wedge \mathbf{d}p_n = \\ &= -\mathbf{d}z^1 \wedge \mathbf{d}z^{n+1} - \dots - \mathbf{d}z^n \wedge \mathbf{d}z^{2n}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

takže srovnáním s (1.77), neboli $\omega = \sum_{\alpha < \beta} \omega_{\alpha\beta} \mathbf{d}z^\alpha \wedge \mathbf{d}z^\beta$, dostáváme $\omega_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 0 \end{pmatrix}$, což je právě symplektická matice (3.18).

- protože

$$\det(\omega_{\alpha\beta}) = \det \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 0 \end{pmatrix} = 1 \neq 0, \quad (3.34)$$

inverzní matice $\omega^{\beta\alpha}$ existuje, a proto je 2-forma ω nedegenerovaná

☒

Forma (3.30), tedy explicitně (3.32), je tudíž opravdu symplektická.

Symplektická forma ω je důležitá především tím, že konvertuje vektory na 1-formy.

Nechť je \mathbf{X} vektor a σ je jemu přiřazená 1-forma, pak lze symbolicky psát:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{X} & \xrightarrow{\omega^\flat} & \sigma \\ \cap & \longleftarrow \omega^\sharp & \cap \\ T_p\mathcal{M} & & T_p^*\mathcal{M} \end{array}$$

kde jsme označili² zobrazení z vektorů do 1-forem jako ω^\flat , a naopak zobrazení z 1-forem do vektorů jako ω^\sharp , tedy

$$\omega^\flat : \mathbf{X} \rightarrow \sigma : \sigma = \omega^\flat(\mathbf{X}) \equiv \omega(\bullet, \mathbf{X}) \equiv i_{\mathbf{X}}\omega \quad (3.35)$$

$$\omega^\sharp : \sigma \rightarrow \mathbf{X} : \mathbf{X} = \omega^\sharp(\sigma), \quad (3.36)$$

kde ω^\sharp je inverzní k ω^\flat . Vztah mezi \mathbf{X} a σ je přitom jednoznačný díky nedegenerovanosti ω .

¹Pod fázovým prostorem zde rozumíme kotečný bandl $T^*\mathcal{Q}$. Později ale ukážeme (viz kapitola 3.8 věnovaná kanonickým transformacím), že specifickou fibrovanou strukturu $T^*\mathcal{Q}$ lze ve skutečnosti ignorovat, a proto již na tomto místě zavádíme obecnější pojem fázového prostoru.

²Značení odpovídá běžné hudební notaci: „béčko \flat “ snižuje tóny, zatímco „křížek \sharp “ tóny zvyšuje, což je analogické tomu, že složky vektorů, které mají horní indexy, přecházejí na složky 1-forem, které píšeme s indexy dole, viz (3.38), (3.39).

Platí tedy:

- složení ω^b a ω^\sharp je identita:

$$\omega^b \omega^\sharp = \text{identita} = \omega^\sharp \omega^b \quad (3.37)$$

- ve složkách platí

$$\sigma_\alpha = \omega_{\alpha\beta} X^\beta \quad (3.38)$$

$$X^\beta = \omega^{\beta\alpha} \sigma_\alpha \quad (3.39)$$

- speciálně na $T^*\mathcal{Q}$ s přirozenými souřadnicemi (q^j, p_j) máme

$$\frac{\partial}{\partial q^j} \quad \sharp \longleftrightarrow \flat \quad \mathbf{d}p_j \quad (3.40)$$

$$\frac{\partial}{\partial p_j} \quad \sharp \longleftrightarrow \flat \quad -\mathbf{d}q^j \quad (3.41)$$

Díky této symbolice můžeme Hamiltonovy kanonické rovnice (3.29) $i_{\mathbf{X}} \omega = \mathbf{d}H$ přepsat do podoby

$$\omega^b(\mathbf{X}) = \mathbf{d}H, \quad (3.42)$$

neboli

$$\boxed{\mathbf{X} = \omega^\sharp(\mathbf{d}H)}. \quad (3.43)$$

To je *explicitní* výraz pro dynamické vektorové pole \mathbf{X} , které jednoznačně určuje vývoj systému pro danou Hamiltonovu funkci H .

Obecně se pomocí symplektické formy ω zavádí tzv. hamiltonovské vektorové pole, které je přiřazeno *libovolné* funkci f na fázovém prostoru.

Definice: hamiltonovské vektorové pole \mathbf{X}_f vůči dynamické proměnné f je taková pole, že

$$\boxed{i_{\mathbf{X}_f} \omega = \mathbf{d}f}, \quad (3.44)$$

neboli

$$\mathbf{X}_f = \omega^\sharp(\mathbf{d}f), \quad (3.45)$$

neboli

$$\omega(\bullet, \mathbf{X}_f) = \mathbf{d}f. \quad (3.46)$$

Přiřazení vektorového pole \mathbf{X}_f funkci f je jednoznačné. Zdaleka ne každé pole je ale hamiltonovské.

3.5 Poissonovy závorky geometricky

Symplektická forma ω je úzce svázána s Poissonovými závorkami, neboť geometrická podoba Poissonových závorek je

$$\boxed{\{f, g\} = \omega(\mathbf{X}_g, \mathbf{X}_f)} = -\omega(\mathbf{X}_f, \mathbf{X}_g), \quad (3.47)$$

kde \mathbf{X}_g je Hamiltonovské pole vůči g , zatím co \mathbf{X}_f je Hamiltonovské pole vůči f .

Důkaz: Nechť dle (3.44)

$$\mathbf{X}_g = \omega^\sharp(\mathbf{d}g), \quad \mathbf{X}_f = \omega^\sharp(\mathbf{d}f), \quad (3.48)$$

neboli ve složkách, viz (3.39),

$$X_g^\beta = \omega^{\beta\alpha} \frac{\partial g}{\partial z^\alpha}, \quad X_f^\gamma = \omega^{\gamma\delta} \frac{\partial f}{\partial z^\delta}. \quad (3.49)$$

Pak s využitím (3.25)

$$\omega(\mathbf{X}_g, \mathbf{X}_f) = \omega_{\beta\gamma} X_g^\beta X_f^\gamma = \omega_{\beta\gamma} \omega^{\gamma\delta} \frac{\partial f}{\partial z^\delta} \omega^{\beta\alpha} \frac{\partial g}{\partial z^\alpha} = \frac{\partial f}{\partial z^\beta} \omega^{\beta\alpha} \frac{\partial g}{\partial z^\alpha} \equiv \{f, g\}. \quad (3.50)$$

☒

Z geometrické definice (3.47) okamžitě pro Poissonovy závorky plyne

- antisymetrie
- bilinearita
- z uzavřenosti symplektické formy ($\mathbf{d}\omega = 0$) plyne také Jacobiho identita

takže struktura Poissonových závorek $\{\bullet, \bullet\}$ tvoří Lieovu algebru na symplektické varietě.

Navíc platí tyto vztahy:

$$\{f, g\} = \omega(\mathbf{X}_g, \mathbf{X}_f) = i_{\mathbf{x}_g} \omega(\bullet, \mathbf{X}_f) = i_{\mathbf{x}_g} (\mathbf{d}f) \equiv \langle \mathbf{d}f, \mathbf{X}_g \rangle = \mathbf{X}_g f = \mathcal{L}_{\mathbf{x}_g} f, \quad (3.51)$$

tedy

$$\{f, g\} = \mathcal{L}_{\mathbf{x}_g} f, \quad \{g, f\} = \mathcal{L}_{\mathbf{x}_f} g, \quad (3.52)$$

takže

$$\boxed{\mathcal{L}_{\mathbf{x}_g} f = -\mathcal{L}_{\mathbf{x}_f} g.} \quad (3.53)$$

3.6 Hamiltonovská verze teorému Emmy Noetherové

V kapitole 2.5 jsme odvodili lagrangeovskou formulaci teorému Noetherové. Stručně řečeno, pokud $\mathcal{L}_z L = 0$, pak $\mathcal{L}_x g = 0$, kde $g = \langle \theta_L, \mathbf{Z} \rangle$. Jinými slovy, veličina g je v takovém případě integrálem pohybu, protože se nemění podél integrálních křivek dynamického vektorového pole \mathbf{X} .

Hamiltonova verze teorému Emmy Noetherové je mnohem elegantnější a zní:

$$\boxed{\mathcal{L}_{\mathbf{x}_g} H = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}_{\mathbf{x}_H} g = 0} \quad (3.54)$$

Důkaz: Stačí jen aplikovat identitu (3.53) pro $f = H$, tedy $0 = \mathcal{L}_{\mathbf{x}_g} H = -\mathcal{L}_{\mathbf{x}_H} g$.

☒

Příklady:

1. $g = p_1$, neboli hybnost, takže s pomocí (3.40) a (3.45) $\mathbf{X}_g \equiv \omega^\sharp(\mathbf{d}p_1) = \frac{\partial}{\partial q^1}$, tedy $\mathbf{X}_{p_1} = \frac{\partial}{\partial q^1}$, což generuje translaci ve směru q^1 ,

$$\mathcal{L}_{\frac{\partial}{\partial q^1}} H = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{L}_{\mathbf{x}_H} p_1 = 0.$$

Je-li tedy H invariantní vůči translaci ve směru q^1 , zachovává se příslušná složka hybnosti p_1 vůči translaci.

2. $g = p_2 q^1 - p_1 q^2$, což je složka momentu hybnosti, takže

$$\mathbf{X}_g = \omega^\sharp(q^1 \mathbf{d}p_2 - q^2 \mathbf{d}p_1 + p_2 \mathbf{d}q^1 - p_1 \mathbf{d}q^2) = -q^2 \frac{\partial}{\partial q^1} + q^1 \frac{\partial}{\partial q^2} - p_2 \frac{\partial}{\partial p_1} + p_1 \frac{\partial}{\partial p_2},$$

kde první dva členy generují rotaci v prostoru a druhé dva členy generují odpovídající rotaci v hybnostech — srovnej s výrazem (2.69). Invariance H vůči rotaci tedy odpovídá zákonu zachování momentu hybnosti.

3.7 Invariance symplektické formy

Pro každé hamiltonovské pole \mathbf{X}_g vůči g platí

$$\boxed{\mathcal{L}_{\mathbf{X}_g} \omega = 0.} \quad (3.55)$$

Speciálně platí $\mathcal{L}_{\mathbf{X}} \omega = 0$ pro dynamické vektorové pole \mathbf{X} odpovídající Hamiltonově funkci H . Jinými slovy *symplektická forma ω se při vývoji systému „nemění“*.

Důkaz: Provedeme snadno pomocí *Cartanovy identity*, podle níž platí $\mathcal{L}_{\mathbf{X}} = \mathbf{i}_{\mathbf{X}} \mathbf{d} + \mathbf{d} \mathbf{i}_{\mathbf{X}}$, viz (1.85). Je tedy $\mathcal{L}_{\mathbf{X}_g} \omega = \mathbf{i}_{\mathbf{X}_g} \mathbf{d} \omega + \mathbf{d} \mathbf{i}_{\mathbf{X}_g} \omega = 0 + \mathbf{d} \mathbf{d} g = \mathbf{d}^2 g = 0$, kde jsme užili faktu, že symplektická forma ω je uzavřená (neboli $\mathbf{d} \omega = 0$) a definice hamiltonovského pole (3.44).

□

3.8 Kanonické transformace geometricky

Vůči kanonickým transformacím je symplektická forma ω invariantní. Konkrétně

Definice: *kanonická transformace* je taková změna souřadnic $Z^\alpha(z^\beta)$ na fázového prostoru, která zachovává kanonický tvar symplektické formy ω , tedy její složky $\omega_{\alpha\beta}$ ve starých souřadnicích $z^\beta \equiv (q^j, p_j)$ i v nových souřadnicích $Z^\alpha \equiv (Q^j, P_j)$ jsou dány symplektickou maticí $\begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{I} \\ \mathbf{I} & 0 \end{pmatrix}$, kde $\omega = \frac{1}{2!} \omega_{\alpha\beta} \mathbf{d} z^\alpha \wedge \mathbf{d} z^\beta = \frac{1}{2!} \omega_{\alpha\beta} \mathbf{d} Z^\alpha \wedge \mathbf{d} Z^\beta$.

Konkrétně tedy:

- $\omega = \mathbf{d} p_j \wedge \mathbf{d} q^j \quad \dots$ v původních souřadnicích
- ↓ kanonická transformace
- $\omega = \mathbf{d} P_j \wedge \mathbf{d} Q^j \quad \dots$ v nových souřadnicích

Speciálně pro $n = 1$ máme $Q(q, p)$, $P(q, p)$, takže

$$\begin{aligned} \omega &= \mathbf{d} P \wedge \mathbf{d} Q = \left(\frac{\partial P}{\partial q} \mathbf{d} q + \frac{\partial P}{\partial p} \mathbf{d} p \right) \wedge \left(\frac{\partial Q}{\partial q} \mathbf{d} q + \frac{\partial Q}{\partial p} \mathbf{d} p \right) = \\ &= \frac{\partial P}{\partial p} \frac{\partial Q}{\partial q} \mathbf{d} p \wedge \mathbf{d} q + \frac{\partial P}{\partial q} \frac{\partial Q}{\partial p} \mathbf{d} q \wedge \mathbf{d} p = \left(\frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial P}{\partial q} \frac{\partial Q}{\partial p} \right) \mathbf{d} p \wedge \mathbf{d} q \end{aligned} \quad (3.56)$$

Aby transformace byla kanonická, člen $\left(\frac{\partial Q}{\partial q} \frac{\partial P}{\partial p} - \frac{\partial P}{\partial q} \frac{\partial Q}{\partial p} \right)$ musí tedy být roven 1, což je známá podmínka $\{Q, P\} = 1$ známá z klasického kurzu teoretické mechaniky (OFY003).

Generující funkce kanonické transformace

Každá (lokální) kanonická transformace odpovídá jisté (lokální) funkci F na fázovém prostoru. Připomeňme, že v kanonických souřadnicích je kanonická Cartanova forma

$$\theta_0 = p_j \mathbf{d} q^j. \quad (3.57)$$

Aplikací vnější derivace \mathbf{d} dostáváme $\mathbf{d} \theta_0 = \mathbf{d} p_j \wedge \mathbf{d} q^j = \omega$, což je symplektická forma. Uvažujme nyní jinou kanonickou Cartanovu formu

$$\theta_1 = P_j \mathbf{d} Q^j \quad (3.58)$$

v souřadnicích (Q^j, P_j) , které jsou s (q^j, p_j) na fázovém prostoru spojeny kanonickou transformací. Zjevně platí $\mathbf{d}\theta_1 = \mathbf{d}P_j \wedge \mathbf{d}Q^j = \omega$, takže odečtením dostáváme

$$\mathbf{d}(\theta_0 - \theta_1) = 0. \quad (3.59)$$

Forma $(\theta_0 - \theta_1)$ je tedy uzavřená, neboli 1-forma $\alpha \equiv p_j \mathbf{d}q^j - P_j \mathbf{d}Q^j$ je uzavřená. Nyní použijeme

Poincarého lemma: Pro uzavřenou 1-formu α lokálně existuje funkce F taková, že $\alpha = \mathbf{d}F$.

Důsledek: Pro danou kanonickou transformaci existuje na každém okolí \mathcal{U} fázového prostoru lokální funkce F , zvaná generující funkce, taková, že

$$\boxed{p_j \mathbf{d}q^j - P_j \mathbf{d}Q^j = \mathbf{d}F.} \quad (3.60)$$

Odtud lze snadno ukázat, že platí

$$\boxed{p_j \dot{q}^j - P_i \dot{Q}^i = \frac{\mathbf{d}F}{\mathbf{d}t}} \quad (3.61)$$

Důkaz: Vyjdeme ze vztahu (3.60), přičemž víme, že $Q^i = Q^i(q^j, p_j)$, tedy

$$p_j \mathbf{d}q^j - P_i \left(\frac{\partial Q^i}{\partial q^j} \mathbf{d}q^j + \frac{\partial Q^i}{\partial p_j} \mathbf{d}p_j \right) = \frac{\partial F}{\partial q^j} \mathbf{d}q^j + \frac{\partial F}{\partial p_j} \mathbf{d}p_j. \quad (3.62)$$

Porovnáním levé a pravé strany této rovnice dostaneme

$$\frac{\partial F}{\partial q^j} = -P_i \frac{\partial Q^i}{\partial q^j} + p_j, \quad \frac{\partial F}{\partial p_j} = -P_i \frac{\partial Q^i}{\partial p_j}. \quad (3.63)$$

Nyní dosadíme tyto výrazy do $\frac{\mathbf{d}F}{\mathbf{d}t}$,

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{d}F}{\mathbf{d}t} &\equiv \frac{\partial F}{\partial q^j} \dot{q}^j + \frac{\partial F}{\partial p_j} \dot{p}_j = \left(-P_i \frac{\partial Q^i}{\partial q^j} + p_j \right) \dot{q}^j - P_i \frac{\partial Q^i}{\partial p_j} \dot{p}_j \\ &= p_j \dot{q}^j - P_i \left(\frac{\partial Q^i}{\partial q^j} \dot{q}^j + \frac{\partial Q^i}{\partial p_j} \dot{p}_j \right) = p_j \dot{q}^j - P_i \dot{Q}^i. \end{aligned}$$

□

Generující funkce typu 1 až 4

Generující funkci F lze vyjádřit v libovolných lokálních souřadnicích na každém okolí \mathcal{U} fázového prostoru, tedy $F(q^j, p_j)$. Předpokládejme nyní, že body z \mathcal{U} lze jednoznačně specifikovat *kombinací starých a nových souřadnic*. O takových kanonických transformacích říkáme, že jsou typu 1 až 4:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ (q, Q) & (q, P) & (p, Q) & (p, P) \end{array}$$

- kanonická transformace typu 1: funkce lze vyjádřit pomocí (q^j, Q^j)
Ze vztahu (3.60) plyne

$$p_j \mathbf{d}q^j - P_j \mathbf{d}Q^j = \mathbf{d}F^{(1)}(q^j, Q^j) = \frac{\partial F^{(1)}}{\partial q^j} \mathbf{d}q^j + \frac{\partial F^{(1)}}{\partial Q^j} \mathbf{d}Q^j,$$

kde $F^{(1)}(q^j, Q^j) = F(q^j, p_i(q^j, Q^j))$. Porovnáním levé a pravé strany dostáváme

$$\boxed{p_j = \frac{\partial F^{(1)}}{\partial q^j}, \quad P_j = -\frac{\partial F^{(1)}}{\partial Q^j}.} \quad (3.64)$$

- kanonická transformace typu 2: funkce lze vyjádřit pomocí (q^j, P_j)
Zaveďme funkci $F^{(2)}(q^j, P_j) = F(q^j, p_i(q^j, P_j)) + P_j Q^j(q^i, P_i)$. Ze vztahu (3.60) pak plyne

$$p_j \mathbf{d}q^j - P_j \mathbf{d}Q^j = \mathbf{d}(F^{(2)} - P_j Q^j) = \mathbf{d}F^{(2)} - (\mathbf{d}P_j)Q^j - P_j \mathbf{d}Q^j$$

tedy

$$p_j \mathbf{d}q^j + Q^j \mathbf{d}P_j = \frac{\partial F^{(2)}}{\partial q^j} \mathbf{d}q^j + \frac{\partial F^{(2)}}{\partial P_j} \mathbf{d}P_j,$$

Porovnáním členů v předchozím výrazu dostáváme

$$\boxed{p_j = \frac{\partial F^{(2)}}{\partial q^j}, \quad Q^j = \frac{\partial F^{(2)}}{\partial P_j}.} \quad (3.65)$$

Podobně odvodíme výrazy pro kanonické transformace typu 3 resp. 4 užitím $F^{(3)}(p_j, Q^j) = F(q^j(p_i, Q^i), p_j) - p_j q^j(p_i, Q^i)$ resp. $F^{(4)}(p_j, P_j) = F(q^j(p_i, P_i), p_j) + P_j Q^j(p_i, P_i) - p_j q^j(p_i, P_i)$.

3.9 Liouvilleova věta

Je zajímavé, že objem oblasti vymezené ve fázovém prostoru se působením toku popisujícího vývoj hamiltonovského systému nemění. Konkrétně, nechť

- \mathcal{R} je oblast fázového prostoru ($\dim = 2n$)
- při dynamickém vývoji jsou body z \mathcal{R} zobrazeny tokem $\Phi_t^{\mathbf{X}}$ do oblasti $\mathcal{R}(t)$
- pak objem $\mathcal{R}(t)$ je stejný jako objem \mathcal{R}

Jak počítat (elementární) objem na varietě?

- objem v \mathbb{R}^2 určený dvěma vektory \mathbf{x}_1 a \mathbf{x}_2 je

$$v(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \pm |\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2| = \det \begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 \\ x_1^2 & x_2^2 \end{pmatrix} = \varepsilon_{ij} x_1^i x_2^j. \quad (3.66)$$

- objem v \mathbb{R}^3 určený třemi vektory $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ je

$$v(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = \mathbf{x}_1 \cdot (\mathbf{x}_2 \times \mathbf{x}_3) = \det \begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 & x_3^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ x_1^3 & x_2^3 & x_3^3 \end{pmatrix} = \varepsilon_{ijk} x_1^i x_2^j x_3^k. \quad (3.67)$$

- objem v \mathbb{R}^n určený n vektory $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ je analogicky

$$v(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \varepsilon_{i\dots k} x_1^i \dots x_n^k. \quad (3.68)$$

Obecně $v(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$ je tzv. objemová funkce tedy zobrazení $\mathbb{V} \times \dots \times \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$, které je

- lineární
- antisymetrické
- nedegenerované

- elementární objemový element na fázovém prostoru je $2n$ -forma.

Speciálně: kanonický objemový element (Liouvilleova $2n$ -forma) je definován

$$\mathbf{v} \equiv \frac{1}{n!} \omega \wedge \dots \wedge \omega = \frac{1}{n!} \omega^{\wedge n}, \quad (3.69)$$

kde ω je symplektická 2-forma. Explicitně v souřadnicích máme

$$\mathbf{v} = \mathbf{d}p_1 \wedge \mathbf{d}q^1 \wedge \mathbf{d}p_2 \wedge \mathbf{d}q^2 \wedge \dots \wedge \mathbf{d}p_n \wedge \mathbf{d}q^n. \quad (3.70)$$

Důkaz: Např. pro $n = 2$ je $\omega = \mathbf{d}p_1 \wedge \mathbf{d}q^1 + \mathbf{d}p_2 \wedge \mathbf{d}q^2$, takže

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{1}{2}(\omega \wedge \omega) = \frac{1}{2}[(\mathbf{d}p_1 \wedge \mathbf{d}q^1 + \mathbf{d}p_2 \wedge \mathbf{d}q^2) \wedge (\mathbf{d}p_1 \wedge \mathbf{d}q^1 + \mathbf{d}p_2 \wedge \mathbf{d}q^2)] \\ &= \frac{1}{2}[\mathbf{d}p_1 \wedge \mathbf{d}q^1 \wedge \mathbf{d}p_2 \wedge \mathbf{d}q^2 + \mathbf{d}p_2 \wedge \mathbf{d}q^2 \wedge \mathbf{d}p_1 \wedge \mathbf{d}q^1] = \mathbf{d}p_1 \wedge \mathbf{d}q^1 \wedge \mathbf{d}p_2 \wedge \mathbf{d}q^2. \end{aligned}$$

☒

Diferenciální tvar Liouvilleovy věty:

Kanonický objemový element \mathbf{v} je invariantní vůči hamiltonovským tokům, neboli

$$\mathcal{L}_{\mathbf{x}} \mathbf{v} = 0. \quad (3.71)$$

Důkaz:

$$\mathcal{L}_{\mathbf{x}} \mathbf{v} = \mathcal{L}_{\mathbf{x}} \frac{1}{n!} \omega^{\wedge n} = \frac{n}{n!} \omega^{\wedge (n-1)} \wedge \mathcal{L}_{\mathbf{x}} \omega = 0, \quad (3.72)$$

neboť dle (3.55) je

$$\mathcal{L}_{\mathbf{x}} \omega = 0. \quad (3.73)$$

☒

Dodatek A

Další vlastnosti tečného bandlu TQ

V tomto dodatku¹ ukážeme, jak regulární Lagrangeova funkce L umožňuje zavést *symplektickou strukturu na TQ* . Existence symplektické formy ω tak není doménou jen „hamiltonovského“ kotečného bandlu T^*Q , ale také „lagrangeovského“ tečného bandlu TQ .

A.1 Symplektická struktura na TQ

Nejprve definujeme několik důležitých pojmů.

Definice: *Lagrangeova 1-forma θ_L* je 1-forma na TQ definovaná v lokálních zobecněných souřadnicích vztahem (2.29), tedy

$$\theta_L = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \mathbf{d}q^i. \quad (\text{A.1})$$

Definice: *Lagrangeova 2-forma ω_L* je 2-forma definovaná jako

$$\omega_L \equiv \mathbf{d}\theta_L = -\frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i} \mathbf{d}q^i \wedge \mathbf{d}q^j - \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} \mathbf{d}q^i \wedge \mathbf{d}\dot{q}^j, \quad (\text{A.2})$$

což lze pomocí „blokového“ přepisu v souřadnicové bázi 2-forem vyjádřit následujícím způsobem

$$(\omega_L)_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i} & & \\ & \ddots & -\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} & \\ \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial \dot{q}^j} & 0 & & \\ & & 0 & 0 \\ \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} & & \ddots & \\ & & & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

Ukážeme nyní, že Lagrangeova 2-forma ω_L je symplektická, tedy uzavřená a neegenerovaná. Uzavřenost Lagrangeovy 2-formy je vidět přímo z definice (A.2) užitím (1.82),

$$\mathbf{d}\omega_L = \mathbf{d}^2\theta_L \equiv 0. \quad (\text{A.4})$$

Podmínkou její nedegenerovanosti je regularita Lagrangeovy funkce. Každou 2-formu lze totiž ve složkách zapsat jako

$$\omega = \frac{1}{2!} \omega_{\alpha\beta} \mathbf{d}u^\alpha \wedge \mathbf{d}u^\beta = \sum_{\alpha < \beta} \omega_{\alpha\beta} \mathbf{d}u^\alpha \wedge \mathbf{d}u^\beta, \quad (\text{A.5})$$

¹Jeho text vychází z bakalářské práce F. Štrupla (MFF UK, 2006).

přičemž $\{\mathbf{d}u^\alpha \wedge \mathbf{d}u^\beta\}$ tvoří bázi všech 2-forem, zde $\mathbf{d}u^\alpha$ jsou buď $\mathbf{d}q^i$ nebo $\mathbf{d}\dot{q}^i$. Podmínkou pro nedegenerovanost 2-formy zapsané ve tvaru (A.5) je pak existence inverzní matice $\omega^{\alpha\beta}$, což je ekvivalentní podmínce

$$\det(\omega_{\alpha\beta}) \neq 0. \quad (\text{A.6})$$

Zavedením jednotného značení lokálních souřadnic na tečném bandlu TQ dimenze $2n$ vztahem

$$(u^1, \dots, u^n, u^{n+1}, \dots, u^{2n}) \equiv (q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n), \quad (\text{A.7})$$

tedy

$$u^j = q^j, \quad u^{j+n} = \dot{q}^j \quad \text{pro } j = 1, \dots, n, \quad (\text{A.8})$$

lze pak z (A.3) již snadno ukázat, že podmínka (A.6) odpovídá platnosti

$$\det \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \neq 0, \quad (\text{A.9})$$

což je podle předpokladů o regularitě L splněno.

Shrnutí: Je vidět, že pro regulární Lagrangeovu funkci je Lagrangeova 2-forma ω_L symplektická forma na tečném bandlu konfigurační variety TQ a činí tak z TQ symplektickou varietu.

A.2 Hamiltonovská dynamika na TQ

Nyní explicitně ukážeme, že symplektická struktura na tečném bandlu TQ konfigurační variety přímo implikuje existenci hamiltonovské dynamiky na TQ. Jedná se přitom právě o dynamiku danou Lagrangeovými rovnicemi.

Chceme-li na varietu TQ, o které již víme, že je díky Lagrangeově 2-formě ω_L nosičem symplektické struktury, zavést dynamiku, můžeme na TQ zavést tzv. hamiltonovské pole.

Definice: *hamiltonovským vektorovým polem* \mathbf{X}_f odpovídajícím libovolné funkci f na varietě Q je myšleno vektorové pole splňující definiční vztah (srovnej s (3.44))

$$\mathbf{i}_{\mathbf{X}_f} \omega_L = \mathbf{d}f. \quad (\text{A.10})$$

Výběrem vhodné generující funkce $f \equiv H$ můžeme získat *hamiltonovský systém* (TQ, ω_L, H) . Funkci H generující časový vývoj systému pak nazýváme *hamiltonián*.

Ukazuje se navíc, že vhodnou volbou funkce H získáme dynamiku hamiltonovského systému odpovídající dynamice generované Lagrangeovými rovnicemi 2. druhu.

Definice: Máme-li na TQ dānu Lagrangeovu funkci $L : \text{TQ} \rightarrow \mathbb{R}$, pak definujeme funkci E_L , které říkáme *energie odpovídající Lagrangeově funkci*, vztahem

$$E_L = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \dot{q}^j - L. \quad (\text{A.11})$$

Funkce E_L v jistém smyslu souvisí s příslušným hamiltoniánem H , neboť integrální křivky dynamického pole příslušejícího funkci E_L (tj. odpovídající Lagrangeovým rovnicím 2. druhu) se po projekci na konfigurační varietu Q shodují s projekcemi křivek odpovídajících Hamiltonovým rovnicím v Hamiltonově formalismu na fázové varietě T^*Q .

Tvrzení: Lagrangeovo vektorové pole \mathbf{X}_L , viz (2.16), příslušející dané Lagrangeově funkci L (tj. dynamické vektorové pole udávající vývoj systému) musí splňovat rovnici

$$\mathbf{i}_{\mathbf{X}_L} \omega_L = \mathbf{d}E_L. \quad (\text{A.12})$$

Důkaz: Pro diferenciál energie $\mathbf{d}E_L$ odpovídající Lagrangeově funkci zřejmě podle (A.11) platí

$$\mathbf{d}E_L = \dot{q}^j \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial \dot{q}^j} \mathbf{d}q^i - \frac{\partial L}{\partial q^i} \mathbf{d}q^i + \dot{q}^j \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \mathbf{d}\dot{q}^i, \quad (\text{A.13})$$

protože dva členy se navzájem kompenzují.

Nyní budeme naopak počítat levou stranu rovnice (A.12), tj. vložení vektorového pole \mathbf{X}_L do symplektické Lagrangeovy 2-formy ω_L . Kombinací vztahů (2.16), (2.20) a (2.21) dostáváme pro vektorové pole \mathbf{X}_L zapsané ve složkách výraz

$$\mathbf{X}_L = \dot{q}^k \frac{\partial}{\partial q^k} + \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^k \partial \dot{q}^l} \right)^{-1} \left(\frac{\partial L}{\partial q^l} - \frac{\partial^2 L}{\partial q^m \partial \dot{q}^l} \dot{q}^m \right) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k}, \quad (\text{A.14})$$

kde $\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^k \partial \dot{q}^l} \right)^{-1}$ vyznačuje inverzní matici. Vyjádření Lagrangeovy 2-formy ve složkách udává vztah (A.2). Připomeňme dále, že operace vložení do 2-formy je definována vztahem (1.76)

$$i_{\mathbf{x}}(\alpha \wedge \beta) = (\alpha \wedge \beta)(\bullet, \mathbf{X}) = \alpha(\bullet)\beta(\mathbf{X}) - \beta(\bullet)\alpha(\mathbf{X}), \quad (\text{A.15})$$

kde $\alpha \wedge \beta$ je 2-forma vzniklá z 1-forem α resp. β . Platí přitom, že

$$\alpha(\mathbf{X}) = \alpha_j X^j. \quad (\text{A.16})$$

Ve složkách lze operaci vložení do 2-formy vyjádřit jako

$$i_{\mathbf{x}}\omega = (i_{\mathbf{x}}\omega)_\alpha \mathbf{d}u^\alpha, \quad (\text{A.17})$$

kde

$$(i_{\mathbf{x}}\omega)_\alpha = \omega_{\alpha\beta} X^\beta. \quad (\text{A.18})$$

Abychom výpočet $i_{\mathbf{x}_L}\omega_L$ zjednodušili a zpřehlednili, využijeme nejprve linearity operace vložení do 2-formy. Dostáváme tedy

$$i_{\mathbf{x}_L}\omega_L = i_{\mathbf{x}_L}\omega_L^{(1)} + i_{\mathbf{x}_L}\omega_L^{(2)}, \quad (\text{A.19})$$

kde jsme označili

$$\omega_L^{(1)} = -\frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i} \mathbf{d}q^i \wedge \mathbf{d}q^j, \quad (\text{A.20})$$

$$\omega_L^{(2)} = -\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} \mathbf{d}q^i \wedge \mathbf{d}\dot{q}^j. \quad (\text{A.21})$$

Dále označíme také jednotlivé členy vektorového pole \mathbf{X}_L

$$\mathbf{X}_L^{(1)} = \dot{q}^k \frac{\partial}{\partial q^k}, \quad (\text{A.22})$$

$$\mathbf{X}_L^{(2)} = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^k \partial \dot{q}^l} \right)^{-1} \left(\frac{\partial L}{\partial q^l} - \frac{\partial^2 L}{\partial q^m \partial \dot{q}^l} \dot{q}^m \right) \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k}, \quad (\text{A.23})$$

takže platí

$$\mathbf{X}_L = \mathbf{X}_L^{(1)} + \mathbf{X}_L^{(2)}. \quad (\text{A.24})$$

Operaci vložení Lagrangeova vektorového pole do Lagrangeovy 2-formy tak nyní můžeme rozeptat na součet čtyř členů

$$i_{\mathbf{x}_L}\omega_L = i_{\mathbf{x}_L^{(1)}}\omega_L^{(1)} + i_{\mathbf{x}_L^{(2)}}\omega_L^{(1)} + i_{\mathbf{x}_L^{(1)}}\omega_L^{(2)} + i_{\mathbf{x}_L^{(2)}}\omega_L^{(2)}. \quad (\text{A.25})$$

Pro jednotlivé členy pak snadno užitím vztahů (A.15) a (A.16) dostaneme

$$i_{\mathbf{x}_L^{(1)}} \omega_L^{(1)} = -\frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i} \dot{q}^k \frac{\partial q^j}{\partial q^k} \mathbf{d}q^i + \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i} \dot{q}^k \frac{\partial q^i}{\partial q^k} \mathbf{d}q^j, \quad (\text{A.26})$$

$$\begin{aligned} i_{\mathbf{x}_L^{(2)}} \omega_L^{(1)} &= -\frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^k \partial \dot{q}^l} \right)^{-1} \left(\frac{\partial L}{\partial q^l} - \frac{\partial^2 L}{\partial q^m \partial \dot{q}^l} \dot{q}^m \right) \frac{\partial q^j}{\partial \dot{q}^k} \mathbf{d}q^i \\ &+ \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^k \partial \dot{q}^l} \right)^{-1} \left(\frac{\partial L}{\partial q^l} - \frac{\partial^2 L}{\partial q^m \partial \dot{q}^l} \dot{q}^m \right) \frac{\partial q^i}{\partial \dot{q}^k} \mathbf{d}q^j, \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

$$i_{\mathbf{x}_L^{(1)}} \omega_L^{(2)} = -\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} \dot{q}^k \frac{\partial \dot{q}^j}{\partial q^k} \mathbf{d}q^i + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} \dot{q}^k \frac{\partial q^i}{\partial q^k} \mathbf{d}\dot{q}^j, \quad (\text{A.28})$$

$$\begin{aligned} i_{\mathbf{x}_L^{(2)}} \omega_L^{(2)} &= -\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^k \partial \dot{q}^l} \right)^{-1} \left(\frac{\partial L}{\partial q^l} - \frac{\partial^2 L}{\partial q^m \partial \dot{q}^l} \dot{q}^m \right) \frac{\partial \dot{q}^j}{\partial \dot{q}^k} \mathbf{d}q^i, \\ &+ \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^k \partial \dot{q}^l} \right)^{-1} \left(\frac{\partial L}{\partial q^l} - \frac{\partial^2 L}{\partial q^m \partial \dot{q}^l} \dot{q}^m \right) \frac{\partial q^i}{\partial \dot{q}^k} \mathbf{d}\dot{q}^j. \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Dále si stačí uvědomit, že platí

$$\frac{\partial q^i}{\partial q^j} = \delta_j^i, \quad \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial \dot{q}^j} = \delta_j^i, \quad \frac{\partial q^i}{\partial \dot{q}^j} = 0, \quad \frac{\partial \dot{q}^i}{\partial q^j} = 0, \quad (\text{A.30})$$

takže vztahy (A.26) až (A.29) pro jednotlivé operace vložení se redukují na

$$i_{\mathbf{x}_L^{(1)}} \omega_L^{(1)} = -\frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i} \dot{q}^j \mathbf{d}q^i + \frac{\partial^2 L}{\partial q^j \partial \dot{q}^i} \dot{q}^i \mathbf{d}q^j, \quad (\text{A.31})$$

$$i_{\mathbf{x}_L^{(2)}} \omega_L^{(1)} = 0, \quad (\text{A.32})$$

$$i_{\mathbf{x}_L^{(1)}} \omega_L^{(2)} = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^i} \dot{q}^i \mathbf{d}\dot{q}^j, \quad (\text{A.33})$$

$$i_{\mathbf{x}_L^{(2)}} \omega_L^{(2)} = -\left(\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial q^m \partial \dot{q}^i} \dot{q}^m \right) \mathbf{d}q^i. \quad (\text{A.34})$$

Nakonec dosadíme zpět do vzorce (A.25), přeznačíme některé sčítací indexy a tím dostaneme

$$i_{\mathbf{x}_L} \omega_L = \dot{q}^j \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial \dot{q}^j} \mathbf{d}q^i - \frac{\partial L}{\partial q^i} \mathbf{d}q^i + \dot{q}^j \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \mathbf{d}\dot{q}^i, \quad (\text{A.35})$$

což je podle (A.13) rovno právě $\mathbf{d}E_L$.

☒

Poznámka: Jestliže Lagrangeovo vektorové pole \mathbf{X}_L existuje, můžeme definovat konzistentní pohybové rovnice druhého řádu. Obecně však toto pole existovat nemusí a ani nemusí být jednoznačné. Podmínkou jednoznačné existence vektorového pole \mathbf{X}_L je právě regularita Lagrangeovy funkce L .

Dodatek B

Časově závislé hamiltoniány

Přirozená geometrická aréna časově závislé Hamiltonovy mechaniky¹ vzniká rozšířením fázového prostoru Γ (s lokálními souřadnicemi q^j a p_j) z bezčasového případu diskutovaného v kapitole 3 o časovou osu \mathbb{R} (se souřadnicí t). Jedná se tedy o kartézský součin zmíněných prostorů tj. $\Gamma \times \mathbb{R}$. Tuto novou varietu nazýváme rozšířeným fázovým prostorem. Lokální souřadnice na tomto novém prostoru jsou (q^j, p_j, t) .

Dimenze rozšířeného fázového prostoru je zjevně $2n + 1$. Není to proto symplektická varieta, jako v nečasovém případě, jejíž dimenze musí být sudá, ale tzv. varieta „kontaktní“.

Nejprve zadefinujeme nezbytné obecné matematické pojmy:

Definice: Nulový vektor a nesingulární 2-forma:

- Vektor \mathbf{X} , pro který je $\Omega(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0$ nezávisle na volbě druhého vektoru \mathbf{Y} , nazveme nulovým vektorem 2-formy Ω . Tento vektor je jednoznačně určen až na skalární násobek.
- 2-formu Ω nazveme nesingulární, pokud lineární prostor generovaný množinou jejích nulových vektorů \mathbf{X} má minimální možnou dimenzi: tedy $\dim = 1$ pokud je dimenze celého prostoru, na kterém je forma Ω definována, lichá, a $\dim = 0$ pokud je tato dimenze sudá.

Zavedení pojmu nesingularity 2-formy je jakýmsi zobecněním pojmu nedegenerovanosti formy. Uvědomme si, že pokud je dimenze celého prostoru formy Ω sudá (tedy $2n$), nesingulárnost říká, že nexistuje žádný nulový vektor, a forma je tedy nedegenerovaná.

Pokud je dimenze prostoru lichá (tedy $2n + 1$) a forma Ω je nesingulární, pak víme, že forma je degenerovaná speciálním způsobem, a to pouze „v jednom směru“. Nebude se však jednat o symplektickou formu, která musí být dle definice nedegenerovaná a uzavřená².

Ilustrace: Je možné ukázat, že

- 2-forma $\omega = dp_j \wedge dq^j$, $\dim = 2n$, je nesingulární a tedy nedegenerovaná.
- 2-forma $\Omega = dp_j \wedge dq^j - d(p_j + q^j) \wedge dt$, $\dim = 2n + 1$, je nesingulární, a tedy degenerovaná pouze v jednom směru, a to $\mathbf{X} = a \left(\frac{\partial}{\partial q^j} - \frac{\partial}{\partial p_j} + \frac{\partial}{\partial t} \right)$, kde a je libovolný skalární násobek.

Nyní ještě jednou přeformulujme předchozí definice a dejme do vztahu nesingulární 2-formu na prostoru liché dimenze a obecné vektorové pole:

Platí: Pokud máme na $(2n+1)$ -dimenzionálním rozšířeném fázovém prostoru zadanou nesingulární 2-formu Ω , potom lze najít právě jedno vektorové pole \mathbf{X} , pro které (až na skalární násobek) platí

$$i_{\mathbf{X}} \Omega = 0. \quad (\text{B.1})$$

Důkaz: Plyne přímo z definice nesingulární 2-formy na celém prostoru liché dimenze.

¹Text tohoto dodatku vychází z bakalářské práce R. Švarce (MFF UK, 2006).

²Připomeňme, že forma Ω se nazývá uzavřená, pokud platí $d\Omega = 0$.

☒

B.1 Zavedení objektů na rozšířeném fázovém prostoru

Nyní již přistupme k zavedení konkrétních geometrických objektů. Na celém fázovém prostoru $\Gamma \times \mathbb{R}$ je možné definovat tzv. kontaktní 1-formu Λ , a to vztahem

$$\Lambda \equiv p_j \mathbf{d}q^j - H \mathbf{d}t, \quad (\text{B.2})$$

kde $H = H(q^j, p_j, t)$. Všimněme si podobnosti s kanonickou Cartanovou 1-formou $\theta_0 = p_j \mathbf{d}q^j$ z bezčasového případu, viz (3.10).

Aplikací vnější derivace na Λ dostáváme uzavřenou, degenerovanou, ale přitom nesingulární 2-formu Ω (nejedná se tedy o formu symplektickou³):

$$\boxed{\Omega \equiv \mathbf{d}\Lambda = \mathbf{d}p_j \wedge \mathbf{d}q^j - \mathbf{d}H \wedge \mathbf{d}t.} \quad (\text{B.3})$$

Uzavřenost této formy je zřejmá, neboť $\mathbf{d}\Omega = \mathbf{d}^2\Lambda \equiv 0$, degenerovanost a nesingulárnost ukážeme později. Je dobré si uvědomit, že symetrie výrazu (B.3) je pouze zdánlivá, neboť $H = H(q^j, p_j, t)$, a tedy $\mathbf{d}H = \frac{\partial H}{\partial q^j} \mathbf{d}q^j + \frac{\partial H}{\partial p_j} \mathbf{d}p_j + \frac{\partial H}{\partial t} \mathbf{d}t$, takže $\mathbf{d}H \wedge \mathbf{d}t = \frac{\partial H}{\partial q^j} \mathbf{d}q^j \wedge \mathbf{d}t + \frac{\partial H}{\partial p_j} \mathbf{d}p_j \wedge \mathbf{d}t$.

Poznamenejme ještě, že pro vyjádření souřadnicových složek $\Omega_{\alpha\beta}$ na $\Gamma \times \mathbb{R}$ dostáváme matici typu $(2n+1) \times (2n+1)$ tvaru

$$\Omega_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{I} & -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \\ \mathbf{I} & 0 & -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \\ \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} & \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.4})$$

kde $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}$ značí sloupcový resp. řádkový blok $\left(\frac{\partial H}{\partial q^1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial q^n}\right)$, stejně tak $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}$ značí blok $\left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_n}\right)$ a \mathbf{I} je jednotková matice typu $n \times n$. Je vidět, že levý horní blok typu $2n \times 2n$ matice (B.4) odpovídá souřadnicovému vyjádření obvyklé symplektické 2-formy $\omega = \mathbf{d}p_j \wedge \mathbf{d}q^j$, tedy matici $\omega_{\alpha\beta}$, z případu časově nezávislé mechaniky, viz (3.18).

Na rozšířeném fázovém prostoru určují dynamiku soustavy integrální křivky vektorového pole \mathbf{X} , které je obecně dáno výrazem

$$\mathbf{X} \equiv \frac{\mathbf{d}}{\mathbf{d}\tau} = q^j \frac{\partial}{\partial q^j} + p_j \frac{\partial}{\partial p_j} + t \frac{\partial}{\partial t}. \quad (\text{B.5})$$

Tečka zde značí derivaci podle τ , což je parametr integrální křivky $\gamma(\tau)$ na $\Gamma \times \mathbb{R}$. Tento parametr může mít například význam „vlastního“ času obecně nezávislého na čase t , tedy na souřadnici rozšířeného fázového prostoru.

Vztah určující toto vektorové pole můžeme upravit užitím Hamiltonových kanonických rovnic. Dále můžeme *požadovat* stejné plynutí obou časů t a τ , to znamená, že ztotožníme parametr integrální křivky se souřadnicí fázového prostoru. Tento dodatečný požadavek vyjádříme výrazem $\dot{t} = \frac{\mathbf{d}t}{\mathbf{d}\tau} = 1$. Výsledné vektorové pole má pak tvar

$$\boxed{\mathbf{X} \equiv \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial}{\partial q^j} - \frac{\partial H}{\partial q^j} \frac{\partial}{\partial p_j} + \frac{\partial}{\partial t}.} \quad (\text{B.6})$$

Nyní zbývá pouze vyřešit otázku vhodného „geometrického“ předpisu pro nalezení tohoto významného vektorového pole. Tento předpis nazveme pohybovými rovnicemi.

³Opět připomeňme, že symplektická forma je uzavřená a nedegenerovaná.

B.2 Pohybové rovnice a vztah k časově nezávislé mechanice

Platí: Dynamické vektorové pole \mathbf{X} je jednoznačně určeno (až na skalární násobek) podmínkou

$$\boxed{i_{\mathbf{X}}\Omega = 0.} \quad (\text{B.7})$$

Právě tento předpis je tedy možné považovat za invariantní tvar pohybových rovnic. Naopak platí, že toto vektorové pole \mathbf{X} určuje v každém bodě rozšířeného fázového prostoru nulový vektor 2-formy Ω .

Důkaz: Ukažme, že vektorové pole \mathbf{X} , viz (B.6), je jednoznačně určeno podmínkou na nulový vektor formy Ω . Počítejme tedy přímo vložení obecného tvaru vektorového pole, viz (B.5), do formy Ω dané (B.3), přičemž uijme antisymetrie vložení vektorového pole do 2-formy a vztahu (1.70)

$$i_{\mathbf{X}}(\alpha \wedge \beta) = (\alpha \wedge \beta)(\bullet, \mathbf{X}) = \alpha(\bullet)\beta(\mathbf{X}) - \beta(\bullet)\alpha(\mathbf{X}), \quad (\text{B.8})$$

tedy

$$\begin{aligned} i_{\mathbf{X}}\Omega = \Omega(\bullet, \mathbf{X}) &= (\mathbf{d}p_j \wedge \mathbf{d}q^j - \mathbf{d}H \wedge \mathbf{d}t)(\bullet, \mathbf{X}) \\ &= [\mathbf{d}H(\mathbf{X})] \mathbf{d}t - [\mathbf{d}t(\mathbf{X})] \mathbf{d}H - [\mathbf{d}p_j(\mathbf{X})] \mathbf{d}q^j + [\mathbf{d}q^j(\mathbf{X})] \mathbf{d}p_j. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Dále rozepišme jednotlivá vložení pole \mathbf{X} do 1-forem z předchozího výrazu:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}H(\mathbf{X}) &= \left(\frac{\partial H}{\partial q^i} \mathbf{d}q^i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \mathbf{d}p_i + \frac{\partial H}{\partial t} \mathbf{d}t \right) \left(\dot{q}^j \frac{\partial}{\partial q^j} + \dot{p}_j \frac{\partial}{\partial p_j} + \dot{t} \frac{\partial}{\partial t} \right) \\ &= \dot{q}^j \frac{\partial H}{\partial q^i} \delta_j^i + \dot{p}_j \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta_i^j + \dot{t} \frac{\partial H}{\partial t} = \dot{q}^j \frac{\partial H}{\partial q^j} + \dot{p}_j \frac{\partial H}{\partial p_j} + \dot{t} \frac{\partial H}{\partial t}, \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

$$\mathbf{d}t(\mathbf{X}) = \dot{t}, \quad \mathbf{d}p_j(\mathbf{X}) = \dot{p}_j, \quad \mathbf{d}q^j(\mathbf{X}) = \dot{q}^j. \quad (\text{B.11})$$

Dosaďme předchozí vztahy do výrazu (B.9), rozepišme $\mathbf{d}H$ a uijme podmínku k nelezení nulového vektoru, to znamená položíme tento výraz rovný nule. Tím dostáváme rovnici

$$\begin{aligned} \left(\dot{q}^j \frac{\partial H}{\partial q^j} + \dot{p}_j \frac{\partial H}{\partial p_j} + \dot{t} \frac{\partial H}{\partial t} \right) \mathbf{d}t - \dot{t} \left(\frac{\partial H}{\partial q^j} \mathbf{d}q^j + \frac{\partial H}{\partial p_j} \mathbf{d}p_j + \frac{\partial H}{\partial t} \mathbf{d}t \right) \\ - \dot{p}_j \mathbf{d}q^j + \dot{q}^j \mathbf{d}p_j = 0. \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Porovnáním jednotlivých koeficientů u $\mathbf{d}t$, $\mathbf{d}q^j$ a $\mathbf{d}p_j$ odvodíme následující tři podmínky

$$\dot{q}^j \frac{\partial H}{\partial q^j} = -\dot{p}_j \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \dot{t} \frac{\partial H}{\partial q^j} = -\dot{p}_j, \quad \dot{t} \frac{\partial H}{\partial p_j} = \dot{q}^j, \quad (\text{B.13})$$

kteří jednoznačně určují koeficienty nulového vektorového pole formy Ω . Jejich dosazením do obecného předpisu (B.5) dostáváme hledaný výraz

$$\mathbf{X} = \dot{t} \left(\frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial}{\partial q^j} - \frac{\partial H}{\partial q^j} \frac{\partial}{\partial p_j} + \frac{\partial}{\partial t} \right), \quad (\text{B.14})$$

z kterého je rovněž zřejmá volnost ve volbě \dot{t} , která určuje pouze stejné škálování každé ze souřadnic, viz (B.6).

☒

Tímto jsme dokázali degenerovanost a přitom nesingulárnost 2-formy Ω , neboť vložení právě jednoho nenulového vektorového pole \mathbf{X} do formy Ω je identicky nulové.

Poznamenaťme, že výraz (B.7) v souřadnicích říká, že složky dynamického vektorového pole \mathbf{X} , tedy $\left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}}, 1 \right)$, jsou vlastním vektorem matice $\Omega_{\alpha\beta}$, viz (B.4). Tomuto vlastnímu vektoru přísluší vlastní číslo 0, jehož násobnost je jedna, což odpovídá degenerovanosti formy Ω .

Invariance formy Ω

Dále je možné ukázat, že 2-forma Ω zůstává při vývoji systému daném vektorovým polem \mathbf{X} konstantní, tedy že se nemění podél integrálních křivek generovaných tímto polem. Toto je možné vyjádřit pomocí Lieovy derivace

$$\boxed{\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\Omega = 0.} \quad (\text{B.15})$$

Zmíněná skutečnost bude mít zajímavou interpretaci v kapitole B.3 o kanonických transformacích.

Důkaz: Aplikujme na Ω známou Cartanovu identitu viz (1.85), tedy

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}}\Omega = i_{\mathbf{X}}d\Omega + d i_{\mathbf{X}}\Omega . \quad (\text{B.16})$$

První člen v předchozím výrazu je nulový, neboť forma Ω je uzavřená. Nulovost druhého členu plyne přímo z pohybových rovnic (B.7).

☒

Platí: Funkce f je integrálem pohybu právě tehdy, když

$$\mathbf{X}(f) = 0 . \quad (\text{B.17})$$

Důkaz: Stačí pouze připomenout definici vektorového pole (B.6), tj. $\mathbf{X} \equiv \frac{d}{d\tau}$ a integrálu pohybu, tedy $\frac{df}{d\tau} = 0$. Následně je užitečné vyjádřit výraz $\mathbf{X}(f)$ pomocí Poissonových závorek a Lieovy derivace (předpokládáme $\frac{dt}{d\tau} = 1$):

$$\mathbf{X}(f) \equiv \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial f}{\partial q^j} - \frac{\partial H}{\partial q^j} \frac{\partial f}{\partial p_j} + \frac{\partial f}{\partial t} \frac{dt}{d\tau} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t} \equiv \frac{df}{d\tau} \equiv \mathcal{L}_{\mathbf{X}}f . \quad (\text{B.18})$$

Poslední ekvivalence plyne přímo z definice Lieovy derivace funkce.

☒

Časově nezávislá mechanika na rozšířeném fázovém prostoru

V případě, že se Hamiltonova funkce nemění s časem t , tj. $H = H(q^j, p_j)$, bude systém popsán naprosto stejným způsobem jako v části B.1. V předchozích úvahách jsme užili volby $\frac{dt}{d\tau} = 1$ vyjadřující stejné plynutí obou časů, tedy ztotožnění parametru integrálních křivek a souřadnice rozšířeného fázového prostoru. Právě tato volba nám umožňuje setrvat na tomto prostoru i v případě, že hamiltonián je pouze funkcí q^j a p_j , přičemž tvar pohybových rovnic bude samozřejmě stejný jako v části B.1.

Ilustrace: *harmonický oscilátor.* Hamiltonián má tvar $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2$. Příslušné vektorové pole (B.6) je tedy dáno výrazem

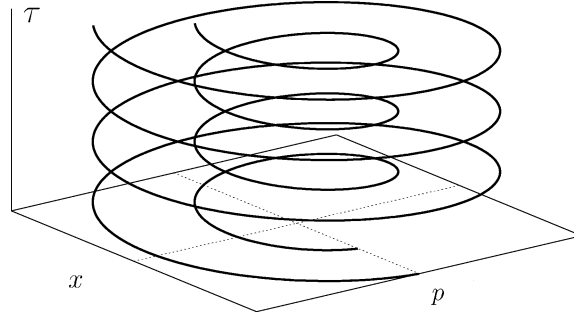
$$\mathbf{X} = \frac{p}{m} \frac{\partial}{\partial x} - kx \frac{\partial}{\partial p} + \frac{\partial}{\partial t} . \quad (\text{B.19})$$

Pro konkrétní hodnoty počátečních podmínek a danou hodnotu tuhosti k a hmotnosti m dostaneme dvě typické integrální křivky ve tvaru spirál. Dvě taková řešení jsou vykreslena na obrázku B.1. Průmětem do roviny (x, p) se ze spirál stanou elipsy, tak jak je dobře známo z fázového portréту harmonického oscilátoru, viz obrázek 2.2

Časově nezávislá mechanika jako řez rozšířeného fázového prostoru

Nyní uvažujme alternativní možnost, že oba časy t a τ jsou zcela nezávislé. Potom si časově neproměnný vývoj můžeme představit⁴ jako limitní případ, kdy čas τ (parametr integrální křivky)

⁴Tento pohled je ekvivalentní projekci $\pi : \Gamma \times \mathbb{R} \rightarrow \Gamma$.



Obrázek B.1: Dvě typické integrální křivky vývoje oscilátoru v rozšířeném fázovém prostoru.

plyne mnohem rychleji než čas t (souřadnice na rozšířeném fázovém prostoru). Tuto limitu je možné formálně vyjádřit jako

$$\frac{dt}{d\tau} = 0, \quad (\text{B.20})$$

což nás prakticky omezí na jeden časový řez rozšířeného fázového prostoru, tedy volbu $t = \text{konst.}$ Předpokládáme, že hamiltonián je pouze funkcí souřadnic q^j a p_j . Proto také dále při výpočtu diferenciálu hamiltoniánu nederivujeme podle souřadnice t .

Vektorové pole (B.5), upravené užitím Hamiltonových kanonických rovnic a podmínky (B.20), přejde na tvar

$$\mathbf{X} = \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial}{\partial q^j} - \frac{\partial H}{\partial q^j} \frac{\partial}{\partial p_j}, \quad (\text{B.21})$$

kteří již má nulovou složku ve směru časové osy, srovnej s (B.6). Vložení tohoto pole do 2-formy Ω , viz (B.3), dostáváme hledanou časově nezávislou pohybovou rovnici⁵

$$i_{\mathbf{X}} \Omega = \mathbf{d}H, \quad (\text{B.22})$$

z níž je zřejmé, že toto nové pole již není nulovým vektorem formy Ω .

Důkaz: Postupujme obdobně jako v časově závislém případě tj. přímo upravujeme levou stranu nových pohybových rovnic užitím antisymetrie vložení vektorového pole do 2-formy dle (B.9). Nyní upravujeme jednotlivá vložení pole \mathbf{X} jeho rozepsáním dle vztahu (B.21):

$$\begin{aligned} i_{\mathbf{X}} \Omega &= dt \left(\frac{\partial H}{\partial q^i} \mathbf{d}q^i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \mathbf{d}p_i \right) \left(\frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial}{\partial q^j} - \frac{\partial H}{\partial q^j} \frac{\partial}{\partial p_j} \right) - 0 \\ &\quad + \mathbf{d}q^j \left[\mathbf{d}p_j \left(\frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right) \right] + \mathbf{d}p_j \left[\mathbf{d}q^j \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} \right) \right] \\ &= dt \left(\frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial H}{\partial p_j} \delta_j^i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q^j} \delta_i^j \right) + \mathbf{d}q^j \frac{\partial H}{\partial q^i} \delta_j^i + \mathbf{d}p_j \frac{\partial H}{\partial p_i} \delta_i^j = \frac{\partial H}{\partial q^j} \mathbf{d}q^j + \frac{\partial H}{\partial p_j} \mathbf{d}p_j \equiv \mathbf{d}H. \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

☒

Jelikož složka vektorového pole do směru osy t je nulová, je výhodné uvažovat pouze projekci tohoto pole a formy Ω na $2n$ -dimenzionální symplektickou varietu se souřadnicemi q^j a p_j . Na tomto novém fázovém prostoru takto dostáváme známou symplektickou formu $\omega = \mathbf{d}p_j \wedge \mathbf{d}q^j$ a vektorové pole $\mathbf{X} = \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial}{\partial q^j} - \frac{\partial H}{\partial q^j} \frac{\partial}{\partial p_j}$. Tyto dva objekty jsou přitom spojeny Hamiltonovými kanonickými rovnicemi v geometrickém tvaru, neboli $i_{\mathbf{X}} \omega = \mathbf{d}H$.

⁵Tato rovnice nápadně připomíná geometrické vyjádření (3.29) Hamiltonových kanonických rovnic z bezčasového případu, $i_{\mathbf{X}} \omega = \mathbf{d}H$, kde ω je symplektická forma na $2n$ -dimenzionální symplektické varietě. Naše rovnice však stále ještě „žije“ na varietě dimenze $2n + 1$.

B.3 Časově závislé kanonické transformace

Na problematiku kanonických transformací, které jsme v bezčasovém případě studovali v části 3.8, je možné pohlížet dvěma ekvivalentními způsoby: Rozlišujeme mezi pohledem *pasivním* a *aktivním*.

V případě transformací pasivních jde pouze o změnu souřadnicového systému, přičemž body v rozšířeném fázovém prostoru zůstávají fixované. Naproti tomu v aktivním přístupu jeden bod z rozšířeného fázového prostoru přechází pomocí jistého toku na bod jiný.

Od *kanonických* transformací požadujeme zachování jednoduchého tvaru pohybových rovnic nebo ekvivalentně zachování 2-formy Ω . Nadále budeme uvažovat pouze transformace pasivní. Potom je možné zavést kanonické transformace následující definicí⁶:

Definice: *kanonickou transformací* nazýváme takovou záměnu souřadnic na fázovém prostoru, která zachovává kanonický tvar formy Ω , tedy

$$(q^j, p_j, t) \rightarrow (Q^j(q^j, p_j, t), P_j(q^j, p_j, t), t) : \\ \mathbf{d}p_j \wedge \mathbf{d}q^j - \mathbf{d}H \wedge \mathbf{d}t = \mathbf{d}P_j \wedge \mathbf{d}Q^j - \mathbf{d}H' \wedge \mathbf{d}t . \quad (\text{B.24})$$

Podívejme se nyní na dynamické vektorové pole určené Hamiltonovými rovnicemi.

Tvrzení: Transformace generovaná fázovým tokem $\Phi_{\mathbf{x}}$, tedy určena dynamickým polem \mathbf{X} dle (B.6), je kanonická.

Důkaz: Plyne přímo z ekvivalence vztahů (B.15) a (B.24) pro tok $\Phi_{\mathbf{x}}$, tedy

$$\mathcal{L}_{\mathbf{x}}\Omega = 0 \Leftrightarrow \Phi_{\mathbf{x}}^*\Omega = \Omega . \quad (\text{B.25})$$

☒

Připomeňme, že každá (lokální) kanonická transformace odpovídá jisté *generující funkci* F na fázové varietě. Dále připomeňme, že kontaktní 1-forma na rozšířeném fázovém prostoru je tvaru $\Lambda = p_j \mathbf{d}q^j - H \mathbf{d}t$, a že aplikací vnější derivace dostáváme nesingulární uzavřenou 2-formu Ω , tedy $\mathbf{d}\Lambda = \Omega$. Nyní uvažujme novou formu Λ_1 danou výrazem

$$\Lambda_1 = P_j \mathbf{d}Q^j - H' \mathbf{d}t \quad (\text{B.26})$$

v nových souřadnicích (Q^j, P_j, t) spojených s (q^j, p_j, t) kanonickou transformací. Potom platí $\mathbf{d}\Lambda_1 = \Omega$. Odečtením dvou různých souřadnicových vyjádření 2-formy Ω dostáváme

$$\mathbf{d}(\Lambda - \Lambda_1) = 0 . \quad (\text{B.27})$$

Z předchozího výrazu plyne uzavřenost formy $\alpha = (\Lambda - \Lambda_1)$. Nyní uijme Poincarého lemmatu, podle něhož pro uzavřenou 1-formu α lokálně existuje funkce F taková, že $\alpha = \mathbf{d}F$.

Důsledek: Pro danou kanonickou transformaci existuje na každém okolí \mathcal{U} fázového prostoru lokální funkce F taková, že

$$\boxed{p_j \mathbf{d}q^j - P_j \mathbf{d}Q^j - H \mathbf{d}t + H' \mathbf{d}t = \mathbf{d}F,} \quad (\text{B.28})$$

což je zobecněním (3.60). Funkci F nazýváme *generující funkcí kanonické transformace*.

Nyní ukažme, že nový hamiltonián $H'(Q^j, P_j, t)$ je určen výrazem

$$H' = \frac{\partial F}{\partial t} + P_i \frac{\partial Q^i}{\partial t} + H . \quad (\text{B.29})$$

⁶V aktivním pohledu kanonickou transformací nazýváme diferencovatelné zobrazení g fázového prostoru, které zachovává 2-formu Ω , tedy $g^*\Omega = \Omega$, kde g^* je pull-back g .

Důkaz: Rozepišme diferenciály $\mathbf{d}F$ a $\mathbf{d}Q^j$ ve vztahu (B.28), kde $F = F(q^j, p_j, t)$ a $Q^i = Q^i(q^j, p_j, t)$:

$$\begin{aligned} p_j \mathbf{d}q^j - P_i \left(\frac{\partial Q^i}{\partial q^j} \mathbf{d}q^j + \frac{\partial Q^i}{\partial p_j} \mathbf{d}p_j + \frac{\partial Q^i}{\partial t} \mathbf{d}t \right) - H \mathbf{d}t + H' \mathbf{d}t \\ = \frac{\partial F}{\partial q^j} \mathbf{d}q^j + \frac{\partial F}{\partial p_j} \mathbf{d}p_j + \frac{\partial F}{\partial t} \mathbf{d}t . \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

Nyní porovnejme levou a pravou stranu předchozího výrazu, čímž dostaneme tři užitečné vztahy, přičemž poslední z nich (B.33) je hledaným důkazem:

$$\frac{\partial F}{\partial q^j} = -P_i \frac{\partial Q^i}{\partial q^j} + p_j , \quad (\text{B.31})$$

$$\frac{\partial F}{\partial p_j} = -P_i \frac{\partial Q^i}{\partial p_j} , \quad (\text{B.32})$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -P_i \frac{\partial Q^i}{\partial t} - H + H' . \quad (\text{B.33})$$

☒

Dále pro konkrétní trajektorii platí, že

$$\boxed{\frac{\mathbf{d}F}{\mathbf{d}t} = (p_j \dot{q}^j - H) - (P_i \dot{Q}^i - H')} . \quad (\text{B.34})$$

Důkaz: Přímou počítejme $\frac{\mathbf{d}F}{\mathbf{d}t}$ a za jednotlivé parciální derivace funkce $F(q^j, p_j, t)$ pak dosadíme výrazy (B.31), (B.32) a (B.33),

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{d}F}{\mathbf{d}t} &= \frac{\partial F}{\partial q^j} \dot{q}^j + \frac{\partial F}{\partial p_j} \dot{p}_j + \frac{\partial F}{\partial t} = \left(p_j - P_i \frac{\partial Q^i}{\partial q^j} \right) \dot{q}^j - P_i \frac{\partial Q^i}{\partial p_j} \dot{p}_j - P_i \frac{\partial Q^i}{\partial t} - H + H' \\ &= (p_j \dot{q}^j - H) - (P_i \dot{Q}^i - H') . \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

☒

Generující funkci F kanonické transformace je možné psát v libovolných souřadnicích na každém okolí \mathcal{U} fázového prostoru. Předpokládejme nyní, že body z \mathcal{U} lze jednoznačně specifikovat kombinací starých a nových souřadnic. O takových kanonických transformacích říkáme, že jsou typu 1 až 4:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ (q, Q, t) & (q, P, t) & (p, Q, t) & (p, P, t) \end{array}$$

- kanonická transformace typu 1: obecná funkce F na varietě lze vyjádřit v konkrétních souřadnicích (q^j, Q^j, t) . Ze vztahu (B.28) potom plyne

$$\begin{aligned} p_j \mathbf{d}q^j - P_j \mathbf{d}Q^j - H \mathbf{d}t + H' \mathbf{d}t &= \mathbf{d}F^{(1)}(q^j, Q^j, t) \\ &= \frac{\partial F^{(1)}}{\partial q^j} \mathbf{d}q^j + \frac{\partial F^{(1)}}{\partial Q^j} \mathbf{d}Q^j + \frac{\partial F^{(1)}}{\partial t} \mathbf{d}t , \end{aligned}$$

kde $F^{(1)}(q^j, Q^j, t) = F(q^j, p_i(q^j, Q^j, t), t)$. Porovnáním levé a pravé strany dostáváme

$$\boxed{p_j = \frac{\partial F^{(1)}}{\partial q^j} , \quad P_j = -\frac{\partial F^{(1)}}{\partial Q^j} , \quad H' = H + \frac{\partial F^{(1)}}{\partial t} .} \quad (\text{B.36})$$

- kanonická transformace typu 2: funkce F lze vyjádřit pomocí (q^j, P_j, t) . Zaveďme funkci $F^{(2)}(q^j, P_j, t) = F(q^j, p_i(q^j, P_j, t), t) + P_j Q^j(q^j, P_j, t)$. Ze vztahu (B.28) plyne

$$\begin{aligned} p_j \mathbf{d}q^j - P_j \mathbf{d}Q^j - H \mathbf{d}t + H' \mathbf{d}t &= \mathbf{d}(F^{(2)} - P_j Q^j) \\ &= \mathbf{d}F^{(2)} - (\mathbf{d}P_j) Q^j - P_j \mathbf{d}Q^j , \end{aligned}$$

tedy

$$p_j \mathbf{d}q^j + Q^j \mathbf{d}P_j - H \mathbf{d}t + H' \mathbf{d}t = \frac{\partial F^{(2)}}{\partial q^j} \mathbf{d}q^j + \frac{\partial F^{(2)}}{\partial P_j} \mathbf{d}P_j + \frac{\partial F^{(2)}}{\partial t} \mathbf{d}t .$$

Porovnáním členů v předchozím výrazu dostáváme

$$\boxed{p_j = \frac{\partial F^{(2)}}{\partial q^j}, \quad Q^j = \frac{\partial F^{(2)}}{\partial P_j}, \quad H' = H + \frac{\partial F^{(2)}}{\partial t}.} \quad (\text{B.37})$$

- **kanonická transformace typu 3:** funkce F lze vyjádřit pomocí (p_j, Q^j, t)
Zaveďme funkci $F^{(3)}(p_j, Q^j, t) = F(q^i(p_j, Q^j, t), p_j, t) - p_j q^j(p_i, Q^i, t)$ a postupujme analogicky jako v předchozích případech, tj. aplikací vztahu (B.28) a porovnáním vzniklých výrazů dostáváme

$$\boxed{q^j = -\frac{\partial F^{(3)}}{\partial p_j}, \quad P_j = -\frac{\partial F^{(3)}}{\partial Q^j}, \quad H' = H + \frac{\partial F^{(3)}}{\partial t}.} \quad (\text{B.38})$$

- **kanonická transformace typu 4:** funkce F lze vyjádřit pomocí (p_j, P_j, t)
Zaveďme funkci $F^{(4)}(p_j, P_j, t) = F(q^i(p_j, P_j, t), p_j, t) + P_j Q^j(p_i, P_i, t) - p_j q^j(p_i, P_i, t)$, aplikujme vztah (B.28) a porovnejme výrazy. Jako výsledek obdržíme

$$\boxed{q^j = -\frac{\partial F^{(4)}}{\partial p_j}, \quad Q^j = \frac{\partial F^{(4)}}{\partial P_j}, \quad H' = H + \frac{\partial F^{(4)}}{\partial t}.} \quad (\text{B.39})$$

Tím jsme odvodili vztahy pro kanonické transformace známé z klasických učebnic mechaniky.

B.4 Geometrická interpretace Hamiltonovy–Jacobiho teorie

V této části připomeneme klasické odvození Hamiltonovy–Jacobiho rovnice a uvědomíme si přitom, co jednotlivé kroky znamenají v řeči geometrických objektů na rozšířeném fázovém prostoru.

Vyjdeme z toho, že známe výraz pro dynamické vektorové pole \mathbf{X} , viz (B.6), tedy

$$\mathbf{X} = \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial}{\partial q^j} - \frac{\partial H}{\partial q^j} \frac{\partial}{\partial p_j} + \frac{\partial}{\partial t},$$

a 2-formu $\Omega = \mathbf{d}p_j \wedge \mathbf{d}q^j - \mathbf{d}H \wedge \mathbf{d}t$, viz (B.3), obojí zadané v souřadnicích (q^j, p_j, t) . V úvodu této kapitoly jsme právě díky formě Ω definovali kanonické transformace a odvodili pro ně některé užitečné vztahy.

Nyní se pokusíme provést takovou kanonickou transformaci, tedy změnu souřadnic na rozšířeném fázovém prostoru, která zjednoduší výraz pro vektorové pole \mathbf{X} . Uvědomme si, že přechod $(q^j, p_j, t) \rightarrow (Q^j, P_j, t)$ vede rovněž ke změně Hamiltoniánu H na H' a umožní nám zapsat Hamiltonovy kanonické rovnice v nových souřadnicích, tedy

$$\frac{\partial H'(Q^j, P_j, t)}{\partial P_j} = \frac{\mathbf{d}Q^j}{\mathbf{d}\tau}, \quad \frac{\partial H'(Q^j, P_j, t)}{\partial Q^j} = -\frac{\mathbf{d}P_j}{\mathbf{d}\tau}. \quad (\text{B.40})$$

Předchozí výrazy zároveň určují dynamické vektorové pole \mathbf{X} v nových souřadnicích,

$$\mathbf{X} = \frac{\partial H'}{\partial P_j} \frac{\partial}{\partial Q^j} - \frac{\partial H'}{\partial Q^j} \frac{\partial}{\partial P_j} + \frac{\partial}{\partial t}. \quad (\text{B.41})$$

Kanonická transformace je zadána svou generující funkcí F , viz (B.28). Tato funkce určuje také nový hamiltonián H' výrazem (B.29). Speciální volbou generující funkce je možné obdržet nový hamiltonián identicky rovný nule, tedy

$$H'(Q^j, P_j, t) \equiv 0. \quad (\text{B.42})$$

Touto volbou se stávají nulovými rovněž levé strany pohybových rovnic (B.40) a vektorové pole (B.41) podél vývoje přechází na velmi jednoduchý tvar

$$\mathbf{X} = \frac{\partial}{\partial t} . \quad (\text{B.43})$$

Řešením takto transformovaných pohybových rovnic jsou konstanty dané počátečními podmínkami

$$Q^j = \alpha^j , \quad P_j = \beta_j . \quad (\text{B.44})$$

Připomeňme, že vývoj systému je geometricky dán integrálními křivkami dynamického vektorového pole \mathbf{X} . V souřadnicích jsou tyto křivky určeny řešením pohybových rovnic v konkrétních souřadnicích, tedy dvojicí funkcí $q^j(\tau)$ a $p_j(\tau)$ resp. $Q^j(\tau)$ a $P_j(\tau)$. V našem případě jsou tímto řešením v nových souřadnicích konstanty. Neznamená to však, že by se systém nevyvíjel, ale pouze to, že v každém časovém řezu máme fixovanou *stále stejnou polohu systému vůči vhodným aktuálním souřadnicím*. Tyto souřadnice se však dynamicky mění právě s vývojem systému, tedy dle tvaru popisovaných integrálních křivek. Změna je určena časově závislou generující funkcí kanonické transformace⁷.

Ještě si uvědomme, že kanonická transformace je definována jako jistý speciální tok na rozšířeném fázovém prostoru, podél kterého se zachovává 2-forma Ω . V úvodu této kapitoly jsme rovněž ukázali, že fázový tok určený polem \mathbf{X} generuje kanonickou transformaci. Právě této transformaci odpovídá předchozí popis. To znamená, že celá informace o vývoji systému je nyní „uložena“ v generující funkci.

Uvažujme nyní konkrétní typ kanonické transformace, například typ 1, kdy lze vše vyjádřit pomocí souřadnic (q^j, Q^j, t) a generující funkce $F^{(1)}$. Pro nový hamiltonián a zbylé souřadnice dostáváme vztahy (B.36).

Pokud v posledním výrazu uplatníme podmínku nulovosti nového hamiltoniánu, dostáváme požadovanou rovnici pro generující funkci

$$H + \frac{\partial F^{(1)}(q^j, Q^j, t)}{\partial t} = 0 . \quad (\text{B.45})$$

Nyní již zbývá pouze označit $F^{(1)}$ jako S a dosadit za p_j do $H(q^j, p_j, t)$ výraz $p_j = \frac{\partial S}{\partial q^j}$. Tím jsme odvodili parciální diferenciální rovnici prvního řádu pro speciální generující funkci S zajišťující nulovost nového hamiltoniánu H' ,

$$H \left(q^j, \frac{\partial S}{\partial q^j}, t \right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 , \quad (\text{B.46})$$

což je *Hamiltonova–Jacobiho rovnice*.

⁷Připomeňme, že v tomto případě opět předpokládáme stejné plynutí obou časů tj. t jakožto souřadnice rozšířeného fázového prostoru a τ jakožto parametru integrální křivky, tedy volbu $\frac{dt}{d\tau} = 1$.

Shrnutí hlavních pojmů a notace

\mathcal{M}	varieta (bod, mapa, atlas)	
x^i	kartézské souřadnice v \mathbb{R}^n	
f	funkce	
$\gamma(t)$	křivka (s parametrem t)	
$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots, \mathbf{v}$	vektor	
$\frac{d}{dt}$	vektor coby diferenciální operátor	$\mathbf{v}(f) = \frac{d}{dt}f = \frac{df}{dt}$
$\alpha, \beta, \dots, \theta$	1-forma (kovektor, forma)	
$\langle \alpha, \mathbf{v} \rangle$	zúžení (kontrakce)	$= \alpha(\mathbf{v})$
$d f$	diferenciál funkce coby forma	$\langle d f, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{v}(f)$
$\mathbf{e}_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$	obecná a souřadnicová báze vektorů	$\mathbf{v} = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$
$\varepsilon^i = dx^i$	obecná a souřadnicová báze forem	$\alpha = \alpha_i dx^i$
$T_P \mathcal{M}$	tečný prostor v bodě P	
$T_P^* \mathcal{M}$	kotečný prostor v bodě P	
$T\mathcal{M}$	tečný bandl	
$T^*\mathcal{M}$	kotečný bandl	
$(\mathcal{B}, \pi, F, \mathcal{F})$	fibrovaný prostor	
\mathcal{L}_x	Lieova derivace	$\mathcal{L}_x f = \mathbf{X}(f)$
$[\mathbf{X}, \mathbf{Y}]$	Lieova závorka vektorových polí	$= \mathcal{L}_x \mathbf{Y}$
\mathcal{Q}	konfigurační varieta	
$T\mathcal{Q}$	rychlostní fázových prostor	

T^*Q	fázový prostor	
q^j	zobecněné souřadnice	
\dot{q}^j	zobecněné rychlosti	
p_j	kanonické hybnosti	
ω	symplektická 2-forma	
\wedge, d	vnější součin, vnější derivace	$\alpha \wedge \beta = -\beta \wedge \alpha, d^2 = 0$
$i_{\mathbf{x}}\omega$	vložení vektorového pole	$\omega(\bullet, \mathbf{X}) = -\omega(\mathbf{X}, \bullet)$
θ_0	kanonická Cartanova forma	$\theta_0 = p_j dq^j$
$\omega_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$	symplektická matice	$\omega = d\theta_0 = dp_j \wedge dq^j$
\mathbf{X}_f	hamiltonovské pole vůči f	$i_{\mathbf{x}_f}\omega = df$
$\{f, g\}$	Poissonovy závorky	$= \mathcal{L}_{\mathbf{x}_g}f = \omega(\mathbf{X}_g, \mathbf{X}_f)$
$\mathcal{L}_{\mathbf{x}}\theta_L = dL$	Lagrangeovy rovnice	
$i_{\mathbf{x}}\omega = dH$	Hamiltonovy rovnice	

Anglický slovníček

dimenze	dimension
fázový prostor	phase space
fibrováný prostor	fibre space
forma (1-forma)	one-form
funkce	function
generující funkce	generating function
hybnost	momentum
kanonická transformace	canonical transformation
(ko)tečný bandl	(co)tangent bundle
(ko)tečný prostor	(co)tangent space
křivka	curve
Lieova derivace	Lie derivative
mapa	chart
Poissonova závorka	Poisson bracket
souřadnice	coordinate
symplektická 2-forma	symplectic 2-form
symplektická matice	symplectic matrix
tok	flow
varieta	manifold
vektor	vector
vektorové pole	vector field
vložení	insert (inner product)
vnější derivace	exterior derivative
vnější součin	exterior product (wedge product)
zdvih	lift
zobrazení	mapping (map)
zúžení	contraction

Rejstřík

- 1-forma, 20
- 1-forma df , 12
- 2-forma, 20

- anuloid, 7
- atlas, 5

- bodová transformace, 31

- Cartanova identita, 22, 42

- diferenciál funkce, 11
- dimenze variety, 5
- duální souřadnicová báze, 11
- dynamické vektorové pole, 23, 26, 38

- elementární objemový element, 45

- forma, 10
- forma na varietě, 10
- funkce na varietě, 7
- fázový portrét, 23

- generující funkce, 43

- hamiltonovské vektorové pole, 40
- Hamiltonovy kanonické rovnice, 37
- harmonický oscilátor, 24

- integrál pohybu, 32
- integrální křivky, 15, 23
- invariance L , 33

- jednotné značení lokálních souřadnic, 37

- kanonická Cartanova 1-forma, 36
- kanonická transformace, 42
- kanonický objemový element, 45
- konfigurační varieta, 7, 26
- kontaktní varieta, 50
- kontrakce, 10
- kotečný bandl, 12
- kružnice, 6
- křivka na varietě, 8

- Lagrangeova 1-forma, 28
- Lagrangeova funkce, 26

- Lagrangeova rovnice, 28
- lagrangeovská vektorová pole, 28
- Lieova algebra, 18
- Lieova derivace
 - diferenciálu, 18
 - formy, 18
 - funkce, 18
 - vektoru, 18
 - zúžení, 18
- Lieova derivace ve složkách, 19
- Lieova grupa transformací, 16
- Lieova závorka, 18
- Lieův přenos
 - 1-formy, 17
 - funkce, 17
 - vektoru, 17
- Liouvilleova věta, 44
- lokální souřadnicový systém, 5

- mapa, 5
- matematické kyvadlo, 25, 26

- objem
 - v \mathbb{R}^2 , 44
 - v \mathbb{R}^3 , 44
 - v \mathbb{R}^n , 44
- objemová funkce, 44

- Poincarého lemma, 43
- Poissonova závorka, 38
- pole 1-forem, 14
- pole druhého řádu, 27
- prostor
 - kotečný, 10
 - tečný, 8
- pull-back, 16
- push-forward, 16

- rotace, 31
- rychlostní fázový prostor, 26

- sféra, 7
- soubor map, 5
- souřadnicová báze, 9
- souřadnicové zobrazení, 5

symplektická forma, 38
symplektická matice, 37

teorém Emmy Noetherové, 31
tečný bandl, 12, 26
tok, 15
torus, 7
translace, 31
třída ekvivalence, 8

varieta, 5
vektor gradientu, 12
vektor na varietě, 8
vektorové pole, 14
vlození vektoru, 20
vnější derivace, 21
vnější součin, 21
volná částice, 30
volný pád, 24, 30
vztah mezi mapami, 5

zákon zachování hybnosti, 33
zákon zachování momentu hybnosti, 33
zúžení, 10

Literatura

- [1] Abraham R., Marsden J. E.: *Foundations of Mechanics*, Addison-Wesley, Reading, 1985.
- [2] Arnold V. I.: *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer, New York, 1978.
- [3] Fecko M.: *Diferenciálna geometria a Lieove grupy pre fyzikov*, Iris, Bratislava 2004.
- [4] José J. V., Saletan E. J.: *Classical Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [5] Oliva W. M.: *Geometric Mechanics*, Springer, Berlin, 2002.
- [6] Schutz B. F.: *Geometrical Methods of Mathematical Physics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [7] Westenholz C. von: *Differential Forms in Mathematical Physics*, North-Holland, Amsterdam 1978.