Úvodní kurz matematických metod fyziky

pro nastupující posluchače 1. ročníku MFF UK

Diferenciální počet

prof. RNDr. Pavel Krtouš, Ph.D.

Definice derivace

Derivace funkce určuje rychlost změny této funkce při změně jejího argumentu.

Definice derivace

Derivace funkce určuje rychlost změny této funkce při změně jejího argumentu.

Funkce $f(x)$ má v bodě x_o derivaci rovnou konečné hodnotě $f'(x_\mathrm{o})$ pokud pro dostatečně malá ε platí

$$f'(x_\mathrm{o}) \quad = \quad \frac{f(x_\mathrm{o}+\varepsilon)-f(x_\mathrm{o})}{\varepsilon} \quad + \quad \text{malá chyba}$$

Definice derivace

Derivace funkce určuje rychlost změny této funkce při změně jejího argumentu.

Funkce $f(x)$ má v bodě x_o derivaci rovnou konečné hodnotě $f'(x_\mathrm{o})$ pokud pro dostatečně malá ε platí

$$f'(x_\mathrm{o}) \quad = \quad \frac{f(x_\mathrm{o} + \varepsilon) - f(x_\mathrm{o})}{\varepsilon} \quad + \quad \text{malá chyba}$$

Pokud lze derivaci $f'(x_\mathrm{o})$ určit pro všechny hodnoty x_o, dostáváme novou funkci $f'(x)$ nazývanou derivace funkce $f(x)$. Používáme též značení

$$f' \quad \equiv \quad \frac{df}{dx}$$

Lineární aproximace funkce pomocí derivace

Funkce $f(x)$ lze v okolí hodnoty x_o aproximovat lineární závislostí plynoucí z definice derivace

$$f(x_\mathrm{o} + \varepsilon) \quad = \quad f(x_\mathrm{o}) \quad + \quad f'(x_\mathrm{o})\, \varepsilon \quad + \quad \text{chyba řádu } \varepsilon^2$$

Alternativně tuto aproximaci můžeme zapsat

$$f(x + dx) \quad = \quad f(x) \quad + \quad \frac{df}{dx}(x)\, dx \quad + \quad \text{chyba řádu } dx^2$$

$$df \quad = \quad \frac{df}{dx}\, dx \quad + \quad \text{chyba řádu } dx^2$$

Lineární aproximace funkce pomocí derivace

Funkce $f(x)$ lze v okolí hodnoty x_o aproximovat lineární závislostí plynoucí z definice derivace

$$f(x_\mathrm{o} + \varepsilon) \;\;=\;\; f(x_\mathrm{o}) \;\;+\;\; f'(x_\mathrm{o})\,\varepsilon \;\;+\;\; \text{chyba řádu } \varepsilon^2$$

Alternativně tuto aproximaci můžeme zapsat

$$f(x + dx) \;\;=\;\; f(x) \;\;+\;\; \frac{df}{dx}(x)\,dx \;\;+\;\; \text{chyba řádu } dx^2$$

$$df \;\;=\;\; \frac{df}{dx}\,dx \;\;+\;\; \text{chyba řádu } dx^2$$

Pokud je funkce ‘slušná’, lze aproximace vylepšovat do vyšších řádů.

Funkce

Funkce je zobrazení z reálných čísel do reálných čísel $\quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Funkce

Funkce je zobrazení z reálných čísel do reálných čísel $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Jednoduše zapsatelné funkce

Funkce

Funkce je zobrazení z reálných čísel do reálných čísel $\quad f \; : \; \mathbb{R} \; \to \; \mathbb{R}$

Jednoduše zapsatelné funkce

Elementární funkce

konstatní funkce	$f(x) = c$	
n-tá mocnina	$f(x) = x^n$	
exponenciální funkce	$f(x) = a^x$	$\exp(x) \equiv e^x$
logaritmické funkce	$\log_a x$	$\log x \equiv \ln x$
trigonometrické funkce	$\sin x\,,\ \cos x\,,\ \tan x\,,\ \cot x$	
hypergeometrické funkce	$\mathrm{sh}\, x\,,\ \mathrm{ch}\, x\,,\ \mathrm{th}\, x\,,\ \mathrm{cth}\, x$	

Funkce

Funkce je zobrazení z reálných čísel do reálných čísel $\quad f \ : \ \mathbb{R} \ \rightarrow \ \mathbb{R}$

Jednoduše zapsatelné funkce

Elementární funkce

konstatní funkce	$f(x) = c$	
n-tá mocnina	$f(x) = x^n$	
exponenciální funkce	$f(x) = a^x$	$\exp(x) \equiv e^x$
logaritmické funkce	$\log_a x$	$\log x \equiv \ln x$
trigonometrické funkce	$\sin x\,,\ \cos x\,,\ \tan x\,,\ \cot x$	
hypergeometrické funkce	$\mathrm{sh}\, x\,,\ \mathrm{ch}\, x\,,\ \mathrm{th}\, x\,,\ \mathrm{cth}\, x$	

Algebraické kombinace

$$\frac{\sin x + \exp(x) cos(x) + x\,\mathrm{sh}\, x}{\tan(x) - x + \log_2(x)} + 3x^5 - 2^x$$

Funkce

Funkce je zobrazení z reálných čísel do reálných čísel $\qquad f \ : \ \mathbb{R} \ \to \ \mathbb{R}$

Jednoduše zapsatelné funkce

Elementární funkce

konstatní funkce	$f(x) = c$	
n-tá mocnina	$f(x) = x^n$	
exponenciální funkce	$f(x) = a^x$	$\exp(x) \equiv e^x$
logaritmické funkce	$\log_a x$	$\log x \equiv \ln x$
trigonometrické funkce	$\sin x\,,\ \cos x\,,\ \tan x\,,\ \cot x$	
hypergeometrické funkce	$\mathrm{sh}\, x\,,\ \mathrm{ch}\, x\,,\ \mathrm{th}\, x\,,\ \mathrm{cth}\, x$	

Algebraické kombinace

$$\frac{\sin x + \exp(x) cos(x) + x\,\mathrm{sh}\, x}{\tan(x) - x + \log_2(x)} + 3x^5 - 2^x$$

Složené funkce

$$f(x) \quad = \quad g\big(h(x)\big) \qquad\qquad [\ f = g \circ h\ ]$$

Funkce

Funkce je zobrazení z reálných čísel do reálných čísel $\quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Jednoduše zapsatelné funkce

Elementární funkce

konstatní funkce	$f(x) = c$	
n-tá mocnina	$f(x) = x^n$	
exponenciální funkce	$f(x) = a^x$	$\exp(x) \equiv e^x$
logaritmické funkce	$\log_a x$	$\log x \equiv \ln x$
trigonometrické funkce	$\sin x\,,\ \cos x\,,\ \tan x\,,\ \cot x$	
hypergeometrické funkce	$\mathrm{sh}\, x\,,\ \mathrm{ch}\, x\,,\ \mathrm{th}\, x\,,\ \mathrm{cth}\, x$	

Algebraické kombinace

$$\frac{\sin x + \exp(x) cos(x) + x\,\mathrm{sh}\, x}{\tan(x) - x + \log_2(x)} + 3x^5 - 2^x$$

Složené funkce

$$f(x) \;=\; g\big(h(x)\big) \qquad [\, f = g \circ h \,] \qquad \sin(x^2)\,, \quad \exp\big(\tan(1+x^3)\big)\,, \quad \sqrt{1+\sin^2(x)}\,, \quad \ldots$$

Funkce

Funkce je zobrazení z reálných čísel do reálných čísel $\quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Jednoduše zapsatelné funkce

Elementární funkce

konstatní funkce	$f(x) = c$	
n-tá mocnina	$f(x) = x^n$	
exponenciální funkce	$f(x) = a^x$	$\exp(x) \equiv e^x$
logaritmické funkce	$\log_a x$	$\log x \equiv \ln x$
trigonometrické funkce	$\sin x\,,\ \cos x\,,\ \tan x\,,\ \cot x$	
hypergeometrické funkce	$\mathrm{sh}\, x\,,\ \mathrm{ch}\, x\,,\ \mathrm{th}\, x\,,\ \mathrm{cth}\, x$	

Algebraické kombinace

$$\frac{\sin x + \exp(x) cos(x) + x\,\mathrm{sh}\, x}{\tan(x) - x + \log_2(x)} + 3x^5 - 2^x$$

Složené funkce

$$f(x) \;=\; g\big(h(x)\big) \qquad [\, f = g \circ h \,] \qquad \sin(x^2)\,, \quad \exp\big(\tan(1+x^3)\big)\,, \quad \sqrt{1+\sin^2(x)}\,, \quad \ldots$$

Inverzní funkce

K prosté funkci f definujeme inverzní funkci f^{inv} splňující $\quad f^{\mathrm{inv}}\big(f(x)\big) = x \quad$ případně $\quad f\big(f^{\mathrm{inv}}(x)\big) = x$

Funkce

Funkce je zobrazení z reálných čísel do reálných čísel $f \; : \; \mathbb{R} \; \rightarrow \; \mathbb{R}$

Jednoduše zapsatelné funkce

Elementární funkce			**Inverzní funkce**
konstatní funkce	$f(x) = c$		
n-tá mocnina	$f(x) = x^n$		$x^{\frac{1}{n}} \equiv \sqrt[n]{x}$
exponenciální funkce	$f(x) = a^x$	$\exp(x) \equiv e^x$	$\log_a x$
logaritmické funkce	$\log_a x$	$\log x \equiv \ln x$	a^x
trigonometrické funkce	$\sin x\,,\ \cos x\,,\ \tan x\,,\ \cot x$		$\arcsin x\,,\ \arccos x\,,\ \arctan x\,,\ \mathrm{arccot}\, x$
hypergeometrické funkce	$\mathrm{sh}\, x\,,\ \mathrm{ch}\, x\,,\ \mathrm{th}\, x\,,\ \mathrm{cth}\, x$		$\mathrm{arcsh}\, x\,,\ \mathrm{arcch}\, x\,,\ \mathrm{arcth}\, x\,,\ \mathrm{arccth}\, x$

Algebraické kombinace

$$\frac{\sin x + \exp(x) cos(x) + x\,\mathrm{sh}\, x}{\tan(x) - x + \log_2(x)} + 3x^5 - 2^x$$

Složené funkce

$$f(x) \;=\; g\big(h(x)\big) \qquad [\; f = g \circ h \;] \qquad \sin(x^2)\,, \quad \exp\big(\tan(1+x^3)\big)\,, \quad \sqrt{1+\sin^2(x)}\,, \quad \dots$$

Inverzní funkce

K prosté funkci f definujeme inverzní funkci f^{inv} splňující $f^{\mathrm{inv}}\big(f(x)\big) = x$ případně $f\big(f^{\mathrm{inv}}(x)\big) = x$

Pravidla pro derivace

$$\mathcal{D}\text{I} \qquad (h+g)' = h' + g'$$

Pravidla pro derivace

$$\mathcal{D}\text{I} \qquad (h+g)' = h' + g'$$

$$\mathcal{D}\text{II} \qquad (af)' = af'$$

Pravidla pro derivace

$$
\begin{array}{lrcl}
\mathcal{D}\text{I} & (h+g)' & = & h' + g' \\
\mathcal{D}\text{II} & (af)' & = & af' \\
\mathcal{D}\text{III} & (gh)' & = & g'h + gh'
\end{array}
$$

Pravidla pro derivace

$\mathcal{D}\mathbf{I}$ $\quad (h+g)' = h' + g'$

$\mathcal{D}\mathbf{0}$ $\quad \text{konst}' = 0$

$\mathcal{D}\mathbf{II}$ $\quad (af)' = af'$

$\mathcal{D}\mathbf{III}$ $\quad (gh)' = g'h + gh'$

Pravidla pro derivace

$$\mathcal{D}\mathbf{I} \qquad (h+g)' = h' + g'$$

$$\mathcal{D}\mathbf{II} \qquad (af)' = af'$$

$$\mathcal{D}\mathbf{III} \qquad (gh)' = g'h + gh'$$

$$\mathcal{D}\mathbf{0} \qquad \mathrm{konst}' = 0$$

$$\mathcal{D}\mathbf{1} \qquad (x^n)' = n\, x^{n-1} \qquad\qquad x' = 1$$

Pravidla pro derivace

$\mathcal{D}\mathbf{I}$ $\quad (h+g)' = h' + g'$

$\mathcal{D}\mathbf{II}$ $\quad (af)' = af'$

$\mathcal{D}\mathbf{III}$ $\quad (gh)' = g'h + gh'$

$\mathcal{D}\mathbf{0}$ $\quad \text{konst}' = 0$

$\mathcal{D}\mathbf{1}$ $\quad (x^n)' = n\, x^{n-1} \qquad x' = 1$

$\mathcal{D}\mathbf{V}$ $\quad f'(x) = g'\big(h(x)\big)\; h'(x) \quad \text{kde} \quad f(x) = g\big(h(x)\big)$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx} \qquad \text{kde } z(x) = z\big(y(x)\big)$$

Pravidla pro derivace

$\mathcal{D}$**I** $\quad (h+g)' \;=\; h' + g'$

$\mathcal{D}$**II** $\quad (af)' \;=\; af'$

$\mathcal{D}$**III** $\quad (gh)' \;=\; g'h + gh'$

$\mathcal{D}$**IV**
$$\left(\frac{g}{h}\right)' \;=\; \frac{g'\,h - g\,h'}{h^2}$$

$\mathcal{D}$**V** $\quad f'(x) = g'\big(h(x)\big)\; h'(x) \quad$ kde $\quad f(x) = g\big(h(x)\big)$

$$\frac{dz}{dx} \;=\; \frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx} \qquad \text{kde } \; z(x) = z\big(y(x)\big)$$

$\mathcal{D}$**0** $\quad \text{konst}' \;=\; 0$

$\mathcal{D}$**1** $\quad (x^n)' = n\, x^{n-1} \qquad x' = 1$

Pravidla pro derivace

$\mathcal{D}\mathbf{I}$ $\quad (h+g)' = h' + g'$

$\mathcal{D}\mathbf{II}$ $\quad (af)' = af'$

$\mathcal{D}\mathbf{III}$ $\quad (gh)' = g'h + gh'$

$\mathcal{D}\mathbf{IV}$ $$\left(\frac{g}{h}\right)' = \frac{g'\,h - g\,h'}{h^2}$$

$\mathcal{D}\mathbf{V}$ $\quad f'(x) = g'\big(h(x)\big)\ h'(x) \quad$ kde $\quad f(x) = g\big(h(x)\big)$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx}$$ kde $z(x) = z\big(y(x)\big)$

$\mathcal{D}\mathbf{0}$ $\quad \mathrm{konst}' = 0$

$\mathcal{D}\mathbf{1}$ $\quad (x^n)' = n\, x^{n-1} \qquad x' = 1$

$\mathcal{D}\mathbf{2}$ $\quad \sin' x = \cos x \qquad \cos' x = -\sin x$

$\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \cot' x = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Pravidla pro derivace

$\mathcal{D}\mathbf{I}$ $\quad (h+g)' \;=\; h' + g'$

$\mathcal{D}\mathbf{II}$ $\quad (af)' \;=\; af'$

$\mathcal{D}\mathbf{III}$ $\quad (gh)' \;=\; g'h + gh'$

$\mathcal{D}\mathbf{IV}$ $\quad \left(\frac{g}{h}\right)' \;=\; \dfrac{g'\,h - g\,h'}{h^2}$

$\mathcal{D}\mathbf{V}$ $\quad f'(x) = g'\big(h(x)\big)\; h'(x) \quad$ kde $\quad f(x) = g\big(h(x)\big)$

$$\frac{dz}{dx} \;=\; \frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx} \qquad \text{kde } \; z(x) = z\big(y(x)\big)$$

$\mathcal{D}\mathbf{0}$ $\quad \text{konst}' \;=\; 0$

$\mathcal{D}\mathbf{1}$ $\quad (x^n)' = n\; x^{n-1} \qquad x' = 1$

$\mathcal{D}\mathbf{2}$ $\quad \sin' x = \cos x \qquad \cos' x = -\sin x$

$\quad \tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \cot' x = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$\mathcal{D}\mathbf{3}$ $\quad \exp' x = \exp x \qquad \big(a^x\big)' = (\log a)\, a^x$

Pravidla pro derivace

$\mathcal{D}$**I** $\quad (h+g)' = h' + g'$

$\mathcal{D}$**II** $\quad (af)' = af'$

$\mathcal{D}$**III** $\quad (gh)' = g'h + gh'$

$\mathcal{D}$**IV** $\quad \left(\frac{g}{h}\right)' = \frac{g'\,h - g\,h'}{h^2}$

$\mathcal{D}$**V** $\quad f'(x) = g'\big(h(x)\big)\; h'(x) \quad$ kde $\quad f(x) = g\big(h(x)\big)$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx} \qquad \text{kde } z(x) = z\big(y(x)\big)$$

$\mathcal{D}$**VI** $\quad (f^{\text{inv}})'(x) = \frac{1}{f'\big(f^{\text{inv}}(x)\big)}$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \qquad \text{kde } x(y) \text{ je inverzní k } y(x)$$

$\mathcal{D}$**0** $\quad \text{konst}' = 0$

$\mathcal{D}$**1** $\quad (x^n)' = n\, x^{n-1} \qquad x' = 1$

$\mathcal{D}$**2** $\quad \sin' x = \cos x \qquad \cos' x = -\sin x$

$\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \cot' x = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$\mathcal{D}$**3** $\quad \exp' x = \exp x \qquad \big(a^x\big)' = (\log a)\, a^x$

Pravidla pro derivace

$\mathcal{D}$**I** $\quad (h+g)' = h' + g'$

$\mathcal{D}$**II** $\quad (af)' = af'$

$\mathcal{D}$**III** $\quad (gh)' = g'h + gh'$

$\mathcal{D}$**IV** $\quad \left(\frac{g}{h}\right)' = \dfrac{g'\,h - g\,h'}{h^2}$

$\mathcal{D}$**V** $\quad f'(x) = g'\big(h(x)\big)\ h'(x) \quad \text{kde} \quad f(x) = g\big(h(x)\big)$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx} \qquad \text{kde } z(x) = z\big(y(x)\big)$$

$\mathcal{D}$**VI** $\quad (f^{\mathrm{inv}})'(x) = \dfrac{1}{f'\big(f^{\mathrm{inv}}(x)\big)}$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \qquad \text{kde } x(y) \text{ je inverzní k } y(x)$$

$\mathcal{D}$**0** $\quad \mathrm{konst}' = 0$

$\mathcal{D}$**1** $\quad (x^n)' = n\ x^{n-1} \qquad x' = 1$

$\mathcal{D}$**2** $\quad \sin' x = \cos x \qquad \cos' x = -\sin x$

$\quad \tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \cot' x = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$\mathcal{D}$**3** $\quad \exp' x = \exp x \qquad \big(a^x\big)' = (\log a)\, a^x$

$\mathcal{D}$**4** $\quad \log' x = \frac{1}{x} \qquad \log'_a x = \frac{1}{x\ \log a}$

Pravidla pro derivace

$\mathcal{D}$I $\quad (h+g)' = h' + g'$

$\mathcal{D}$II $\quad (af)' = af'$

$\mathcal{D}$III $\quad (gh)' = g'h + gh'$

$\mathcal{D}$IV $\quad \left(\frac{g}{h}\right)' = \dfrac{g'\,h - g\,h'}{h^2}$

$\mathcal{D}$V $\quad f'(x) = g'\big(h(x)\big)\ h'(x) \quad$ kde $\quad f(x) = g\big(h(x)\big)$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx} \qquad \text{kde } z(x) = z\big(y(x)\big)$$

$\mathcal{D}$VI $\quad (f^{\mathrm{inv}})'(x) = \dfrac{1}{f'\big(f^{\mathrm{inv}}(x)\big)}$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \qquad \text{kde } x(y) \text{ je inverzní k } y(x)$$

$\mathcal{D}$0 $\quad \mathrm{konst}' = 0$

$\mathcal{D}$1 $\quad (x^n)' = n\,x^{n-1} \qquad x' = 1$

$\mathcal{D}$2 $\quad \sin' x = \cos x \qquad \cos' x = -\sin x$

$\tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \cot' x = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$\mathcal{D}$3 $\quad \exp' x = \exp x \qquad \big(a^x\big)' = (\log a)\, a^x$

$\mathcal{D}$4 $\quad \log' x = \frac{1}{x} \qquad \log'_a x = \frac{1}{x\,\log a}$

$\mathcal{D}$5 $\quad \arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\arctan' x = \frac{1}{1+x^2} \qquad \mathrm{arccot}' x = -\frac{1}{1+x^2}$

Pravidla pro derivace

$\mathcal{D}\mathbf{I}$ $\quad (h+g)' = h' + g'$

$\mathcal{D}\mathbf{II}$ $\quad (af)' = af'$

$\mathcal{D}\mathbf{III}$ $\quad (gh)' = g'h + gh'$

$\mathcal{D}\mathbf{IV}$ $\quad \left(\frac{g}{h}\right)' = \dfrac{g'\,h - g\,h'}{h^2}$

$\mathcal{D}\mathbf{V}$ $\quad f'(x) = g'\big(h(x)\big)\ h'(x) \quad$ kde $\quad f(x) = g\big(h(x)\big)$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx} \qquad \text{kde } z(x) = z\big(y(x)\big)$$

$\mathcal{D}\mathbf{VI}$ $\quad (f^{\mathrm{inv}})'(x) = \dfrac{1}{f'\big(f^{\mathrm{inv}}(x)\big)}$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \qquad \text{kde } x(y) \text{ je inverzní k } y(x)$$

$\mathcal{D}\mathbf{0}$ $\quad \mathrm{konst}' = 0$

$\mathcal{D}\mathbf{1}$ $\quad (x^n)' = n\,x^{n-1} \qquad x' = 1$

$\mathcal{D}\mathbf{2}$ $\quad \sin' x = \cos x \qquad \cos' x = -\sin x$

$\quad \tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \cot' x = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$\mathcal{D}\mathbf{3}$ $\quad \exp' x = \exp x \qquad \big(a^x\big)' = (\log a)\, a^x$

$\mathcal{D}\mathbf{4}$ $\quad \log' x = \frac{1}{x} \qquad \log_a' x = \frac{1}{x \log a}$

$\mathcal{D}\mathbf{5}$ $\quad \arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\quad \arctan' x = \frac{1}{1+x^2} \qquad \mathrm{arccot}' x = -\frac{1}{1+x^2}$

$\mathcal{D}\mathbf{6}$ $\quad \mathrm{sh}' x = \mathrm{ch}\, x \qquad \mathrm{ch}' x = \mathrm{sh}\, x$

$\quad \mathrm{th}' x = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x} \qquad \mathrm{cth}' x = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$

Pravidla pro derivace

$\mathcal{D}$**I** $\quad (h+g)' = h' + g'$

$\mathcal{D}$**II** $\quad (af)' = af'$

$\mathcal{D}$**III** $\quad (gh)' = g'h + gh'$

$\mathcal{D}$**IV** $\quad \left(\frac{g}{h}\right)' = \frac{g'\,h - g\,h'}{h^2}$

$\mathcal{D}$**V** $\quad f'(x) = g'\big(h(x)\big)\; h'(x) \quad$ kde $\quad f(x) = g\big(h(x)\big)$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx} \qquad \text{kde } z(x) = z\big(y(x)\big)$$

$\mathcal{D}$**VI** $\quad (f^{\mathrm{inv}})'(x) = \frac{1}{f'\big(f^{\mathrm{inv}}(x)\big)}$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \qquad \text{kde } x(y) \text{ je inverzní k } y(x)$$

$\mathcal{D}$**0** $\quad \mathrm{konst}' = 0$

$\mathcal{D}$**1** $\quad (x^n)' = n\,x^{n-1} \qquad x' = 1$

$\mathcal{D}$**2** $\quad \sin' x = \cos x \qquad \cos' x = -\sin x$

$\quad \tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \cot' x = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$\mathcal{D}$**3** $\quad \exp' x = \exp x \qquad \big(a^x\big)' = (\log a)\,a^x$

$\mathcal{D}$**4** $\quad \log' x = \frac{1}{x} \qquad \log_a' x = \frac{1}{x\,\log a}$

$\mathcal{D}$**5** $\quad \arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\quad \arctan' x = \frac{1}{1+x^2} \qquad \mathrm{arccot}' x = -\frac{1}{1+x^2}$

$\mathcal{D}$**6** $\quad \mathrm{sh}' x = \mathrm{ch}\, x \qquad \mathrm{ch}' x = \mathrm{sh}\, x$

$\quad \mathrm{th}' x = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x} \qquad \mathrm{cth}' x = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$

$\mathcal{D}$**7** $\quad \mathrm{arcsh}' x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \mathrm{arcch}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$\quad \mathrm{arcth}' x = \frac{1}{1-x^2} \qquad \mathrm{arccth}' x = \frac{1}{1-x^2}$