Úvodní kurz matematických metod fyziky

pro nastupující posluchače 1. ročníku MFF UK

Geometrie

prof. RNDr. Pavel Krtouš, Ph.D.

Skalární součin $\qquad \vec{a}, \vec{b} \quad \rightarrow \quad \left(\vec{a}, \vec{b}\right) \equiv \vec{a} \cdot \vec{b} \in \mathbb{R}$

$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \left(\vec{b}, \vec{a}\right)$ symetrie

$\left(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}\right) = \left(\vec{a}, \vec{c}\right) + \left(\vec{b}, \vec{c}\right) \qquad \left(r\vec{a}, \vec{b}\right) = r\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$ linearita

$\left(\vec{a}, \vec{a}\right) > 0 \quad \text{pro } \vec{a} \neq \vec{0}$ positivní definitnost

$\forall \vec{x} \quad \left(\vec{a}, \vec{x}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = 0$ nedegenerovanost

$|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})}$ délka vektoru

$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \sphericalangle[\vec{a}, \vec{b}]$ úhel mezi vektory

Skalární součin $\vec{a}, \vec{b} \quad \rightarrow \quad \big(\vec{a}, \vec{b}\big) \;\equiv\; \vec{a}\cdot\vec{b} \;\in\; \mathbb{R}$

$\big(\vec{a}, \vec{b}\big) \;=\; \big(\vec{b}, \vec{a}\big)$	symetrie
$\big(\vec{a}+\vec{b}, \vec{c}\big) = \big(\vec{a}, \vec{c}\big) + \big(\vec{b}, \vec{c}\big) \qquad \big(r\vec{a}, \vec{b}\big) = r\big(\vec{a}, \vec{b}\big)$	linearita
$\big(\vec{a}, \vec{a}\big) > 0 \quad \text{pro } \vec{a} \neq \vec{0}$	positivní definitnost
$\forall \vec{x} \quad \big(\vec{a}, \vec{x}\big) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = 0$	nedegenerovanost
$\lvert\vec{a}\rvert \;=\; \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})}$	délka vektoru
$\big(\vec{a}, \vec{b}\big) \;=\; \lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert \,\cos\sphericalangle[\vec{a}, \vec{b}]$	úhel mezi vektory

Vektorový součin $\vec{a}, \vec{b} \quad \rightarrow \quad \vec{v} \;=\; \vec{a}\times\vec{b}$

$\vec{v} \perp \vec{a} \qquad \vec{v} \perp \vec{b} \qquad \lvert\vec{v}\rvert \;=\; \lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert \sin\sphericalangle[\vec{a}, \vec{b}]$	definiční vlastnosti
$\vec{a}\times\vec{b} \;=\; -\vec{b}\times\vec{a}$	antisymetrie
$\big(\vec{a}+\vec{b}\big)\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c} + \vec{b}\times\vec{c} \qquad \big(r\vec{a}\big)\times\vec{b} = r\big(\vec{a}\times\vec{b}\big)$	linearita
$\big(\vec{a}\times\vec{b}\big)\times\vec{c} \;\neq\; \vec{a}\times\big(\vec{b}\times\vec{c}\big)$	není asociativní
$\big(\vec{a}\times\vec{b}\big)\times\vec{c} \;=\; \vec{b}\,\big(\vec{a}, \vec{c}\big) - \vec{c}\,\big(\vec{a}, \vec{b}\big)$	“bac − cab”

Skalární součin $\vec{a}, \vec{b} \quad \rightarrow \quad \left(\vec{a}, \vec{b}\right) \;\equiv\; \vec{a} \cdot \vec{b} \;\in\; \mathbb{R}$

$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) \;=\; \left(\vec{b}, \vec{a}\right)$	symetrie
$\left(\vec{a}+\vec{b}, \vec{c}\right) = \left(\vec{a}, \vec{c}\right) + \left(\vec{b}, \vec{c}\right) \qquad \left(r\vec{a}, \vec{b}\right) = r\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$	linearita
$\left(\vec{a}, \vec{a}\right) > 0 \quad \text{pro } \vec{a} \neq \vec{0}$	positivní definitnost
$\forall \vec{x} \quad \left(\vec{a}, \vec{x}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = 0$	nedegenerovanost
$\lvert\vec{a}\rvert \;=\; \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})}$	délka vektoru
$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) \;=\; \lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert \, \cos\sphericalangle[\vec{a}, \vec{b}]$	úhel mezi vektory

Vektorový součin $\vec{a}, \vec{b} \quad \rightarrow \quad \vec{v} \;=\; \vec{a} \times \vec{b}$

$\vec{v} \perp \vec{a} \qquad \vec{v} \perp \vec{b} \qquad \lvert\vec{v}\rvert \;=\; \lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert \sin\sphericalangle[\vec{a}, \vec{b}]$	definiční vlastnosti
$\vec{a} \times \vec{b} \;=\; -\vec{b} \times \vec{a}$	antisymetrie
$\left(\vec{a}+\vec{b}\right) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} \qquad \left(r\vec{a}\right) \times \vec{b} = r\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$	linearita
$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c} \;\neq\; \vec{a} \times \left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$	není asociativní
$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \times \vec{c} \;=\; \vec{b}\left(\vec{a}, \vec{c}\right) - \vec{c}\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$	“bac − cab”

Smíšený součin $\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} \;=\; \left(\vec{b} \times \vec{c}\right) \cdot \vec{a} \;=\; \left(\vec{c} \times \vec{a}\right) \cdot \vec{b}$

$=$ orientovaný objem rovnoběžnostěnu napnutého na $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$

Souřadnice vektorů

každý vektor lze vyjádřit vůči bázi

báze vektorů $=$ lineárně nezávislé vektory $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$

$$\vec{a} = a^1\,\vec{e}_1 + a^2\,\vec{e}_2 + a^3\,\vec{e}_3$$

$$\text{vektor } \vec{a} \quad \leftrightarrow \quad \text{souřadnice } \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix}$$

ortonormální báze

$$|\vec{e}_j| \;=\; 1 \qquad\qquad \left(\vec{e}_i, \vec{e}_j\right) \;=\; 0 \qquad \text{pro } i \neq j$$

Souřadnice vektorů

každý vektor lze vyjádřit vůči bázi

báze vektorů $=$ lineárně nezávislé vektory $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$

$$\vec{a} = a^1\,\vec{e}_1 + a^2\,\vec{e}_2 + a^3\,\vec{e}_3$$

$$\text{vektor } \vec{a} \quad \leftrightarrow \quad \text{souřadnice } \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix}$$

ortonormální báze

$$|\vec{e}_j| \;=\; 1 \qquad\qquad \big(\vec{e}_i, \vec{e}_j\big) \;=\; 0 \qquad \text{pro } i \neq j$$

Skalární součin v ortonormálních souřadnicích

$$\big(\vec{a}, \vec{b}\big) \;\equiv\; a^1\,b^1 + a^2\,b^2 + a^3\,b^3$$

Vektorový součin v ortonormálních souřadnicích

$$\vec{v} \;=\; \vec{a} \times \vec{b} \qquad\qquad \begin{aligned} v^1 &= a^2\,b^3 - a^3\,b^2 \\ v^2 &= a^3\,b^1 - a^1\,b^3 \\ v^3 &= a^1\,b^2 - a^2\,b^1 \end{aligned}$$

Smíšený součin ortonormálních souřadnicích

$$\big(\vec{a} \times \vec{b}\big) \cdot \vec{c} \;=\; a^1\,b^2\,c^3 + a^2\,b^3\,c^1 + a^3\,b^1\,c^2 - a^1\,b^3\,c^2 - a^3\,b^2\,c^1 - a^2\,b^1\,c^3 \;=\; \det \begin{bmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{bmatrix}$$

Souřadnice bodů

Lineární souřadnice

vztažná soustava: počátek P a souřadnicové osy dané lineárně nezávislými směry $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$

$$A \;=\; P \;+\; \vec{r} \;=\; P \;+\; x^1\,\vec{e}_1 + x^2\,\vec{e}_2 + x^3\,\vec{e}_3$$

$\vec{r}$ průvodič bodu A $\quad$ $\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}$ (lineární) souřadnice bodu A

místo x^1, x^2, x^3 často používáme označení x, y, z

Souřadnice bodů

Lineární souřadnice

vztažná soustava: počátek P a souřadnicové osy dané lineárně nezávislými směry $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$

$$A \;=\; P \;+\; \vec{r} \;=\; P \;+\; x^1\,\vec{e}_1 + x^2\,\vec{e}_2 + x^3\,\vec{e}_3$$

$\vec{r}$ průvodič bodu A $\quad\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}$ (lineární) souřadnice bodu A

místo x^1, x^2, x^3 často používáme označení x, y, z

Kartézské souřadnice

osy $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ tvoří ortonormální bázi (jsou na sebe kolmé a mají stejnou jednotku)

vzdálenost bodů v kartézských souřadnicích:

$$d(A,B) \;=\; |A-B| \;=\; \sqrt{\left(\Delta x^1\right)^2 + \left(\Delta x^2\right)^2 + \left(\Delta x^3\right)^2} \;=\; \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

kde $\qquad \Delta x^j = x^j(B) - x^j(A)$

Rovina E^2

Polární souřadnice ρ, φ

$$x = \rho \cos \varphi \qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$y = \rho \sin \varphi \qquad \tan \varphi = \frac{y}{x}$$

Rovina E^2

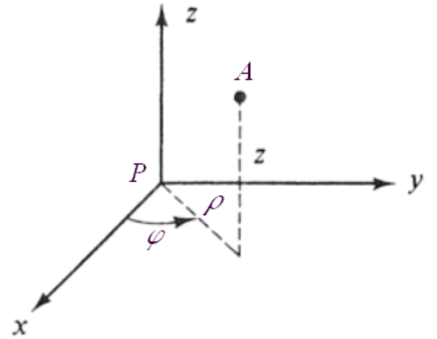
Polární souřadnice ρ, φ

$$x = \rho \cos\varphi \qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$y = \rho \sin\varphi \qquad \tan\varphi = \frac{y}{x}$$

Prostor E^3

Cylindrické souřadnice ρ, φ, z

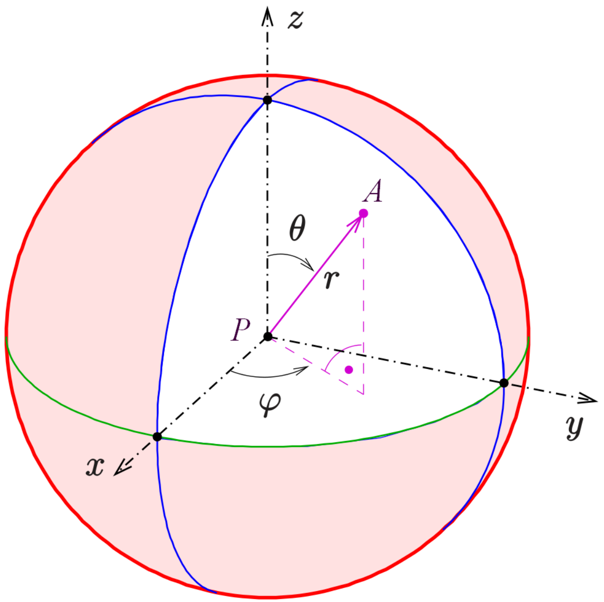
$$x = \rho \cos\varphi \qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$y = \rho \sin\varphi \qquad \tan\varphi = \frac{y}{x}$$
$$z = z \qquad z = z$$



Rovina E^2

Polární souřadnice ρ, φ

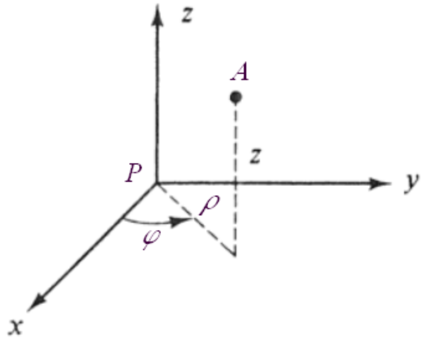
$$x = \rho\cos\varphi \qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$y = \rho\sin\varphi \qquad \tan\varphi = \frac{y}{x}$$



Prostor E^3

Cylindrické souřadnice ρ, φ, z

$$x = \rho\cos\varphi \qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$y = \rho\sin\varphi \qquad \tan\varphi = \frac{y}{x}$$
$$z = z \qquad z = z$$



Sférické souřadnice r, θ, φ

$$x = r\sin\theta\,\cos\varphi \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$
$$y = r\sin\theta\,\sin\varphi \qquad \tan\theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} = \frac{\rho}{z}$$
$$z = r\cos\theta \qquad \tan\varphi = \frac{y}{x}$$