

①

Derivace

• cíl fyziky : popsat fungování světa

• Jak ? pomocí dobře zvolených měřitelných veličin, např.:

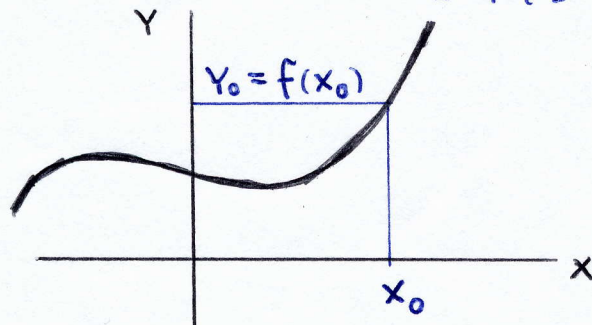
t x v a F p T V Q ...
čas vzdálenost rychlost zrychlení síla tlak teplota objem teplo

• zkoumáme jejich vzájemné souvislosti, např.

$x(t)$ $v(t)$ $a(t)$ $v(x)$ $p(V)$ $Q(T)$...

• to jsou funkce $Y = f(x)$: zobrazení $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:
"x přiřazuje Y"
 $x \in \mathcal{D}_f \rightarrow Y \in \mathcal{R}_f$

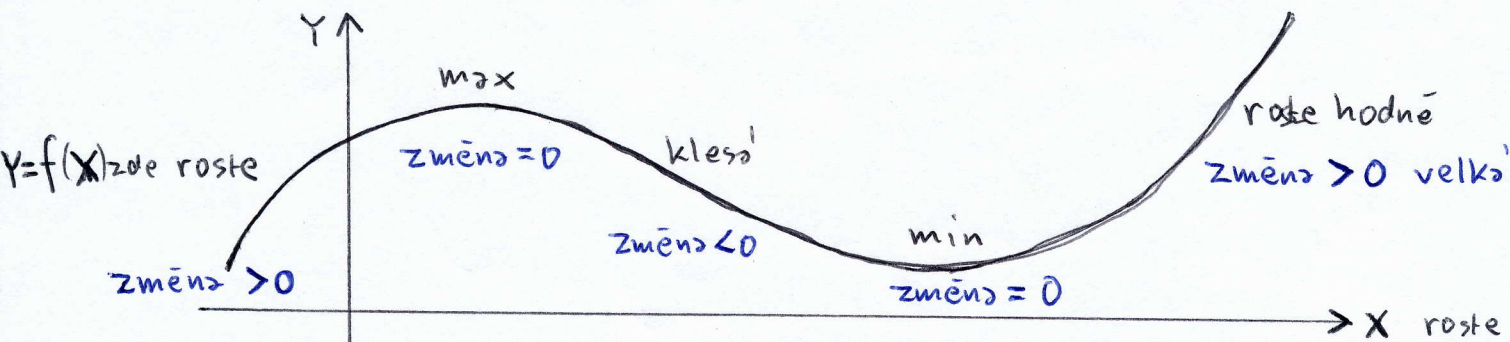
• hezky znázorněno grafem funkce, většinou
v kartézských souřadnicích $[x, Y]$:



lin. fce $\rightarrow$ přímka
kvadr. fce $\rightarrow$ parabola
...

• funkce udává hodnotu v daném x_0

• velmi často nás ale zajímá změna hodnot fce $f(x)$ v okolí x_0



• tuto změnu přesně udává tzv. derivace funkce $f(x)$ v x_0

②

- derivaci funkce $f(x)$ v místě x_0 označujeme symbolem

$$f'(x_0)$$

nebo také ekvivalentně

$$\frac{df}{dx}(x_0)$$

(je to číslo!)

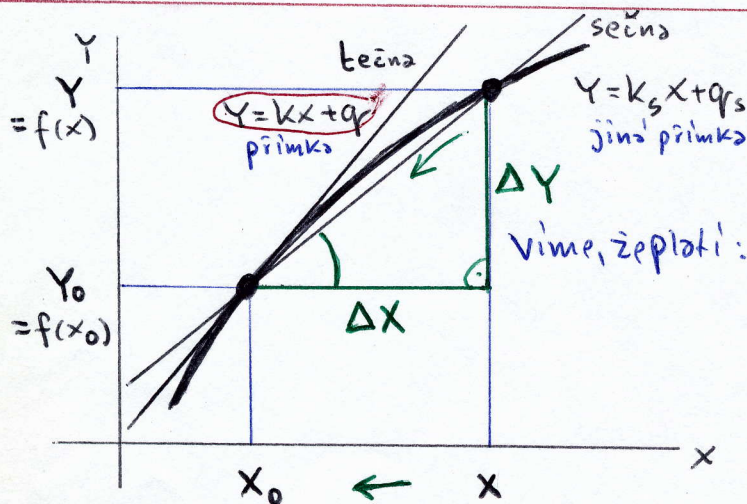
- jak se toto číslo počítá a co znamená?

změna f ie $f(x)$ v místě x_0 je dána

!

směrnici tečny ke grafu $f(x)$ v bodě $[x_0, Y_0]$

(dotýká se)



$$k_s \equiv \frac{\Delta Y}{\Delta X}$$

tečna je limita sečen

neboli $k_s \rightarrow k$

~~tedy~~ $x \rightarrow x_0$

~~tedy~~ $\Delta x \rightarrow 0$ ($\Delta Y \rightarrow 0$)

takže:

$$f'(x_0) \equiv k = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} k_s = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta Y}{\Delta X}$$

a protože přírůstky jsou $\Delta x \equiv x - x_0$ a $\Delta Y = Y - Y_0 = f(x) - f(x_0)$

dostáváme se k následující

definici derivace :

$$f'(x_0) \equiv \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

což vysvětluje
ekvivalentní
symbol derivace

$$\frac{df}{dx}(x_0)$$

- lokálně je $f'(x_0)$ číslo pro každé x_0
- globálně je $f'(x)$ funkce pro kterékoli x

" f' je nová funkce, která vzniká z původní f odvozením, tedy derivací"

3) přesně tímto exaktním způsobem jsou definovány významné fyzikální veličiny:

rychlost $v(t)$ je derivace vzdálenosti $x(t)$ podle času t

$$v(t) \stackrel{\text{def.}}{=} x'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

zrychlení $a(t)$ je derivace rychlosti $v(t)$ podle času t

$$a(t) = v'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

a tak podobně, např.

tepelná kapacita tělesa

$$C = \frac{dQ}{dT}$$

změna tepla s teplotou

elektrický proud

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

změna náboje za čas

výkon

$$P = \frac{dW}{dt}$$

změna práce za čas

Praktické počítání derivací $f'(x)$ funkce $f(x)$

- Ⓐ tabulka derivací elementárních funkcí
- Ⓑ pravidla pro derivování jejich kombinací

ROZDAT VŠEM TABULKU

Ⓐ: zapamatovat si hlavně

$$\left\{ \begin{array}{l} (C)' = 0 \\ (x)' = 1 \\ (x^2)' = 2x \\ (x^m)' = m x^{m-1} \\ (\sin x)' = \cos x \\ (\cos x)' = -\sin x \\ (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \end{array} \right.$$

C...konstanta

$$\left\{ \begin{array}{l} (e^x)' = e^x \\ (\ln x)' = \frac{1}{x} \end{array} \right.$$

Derivace elementárních funkcí

$f(x)$	$f'(x)$	poznámka
c	0	$c = \text{konst.}$
x	1	
x^n	$n x^{n-1}$	$n \in R$
e^x	e^x	
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	
a^x	$a^x \ln a$	$a > 0, a \neq 1$
x^x	$x^x(1 + \ln x)$	
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$a > 0, a \neq 1$
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$= -(\operatorname{arccot} x)'$
$\sinh x$	$\cosh x$	
$\cosh x$	$\sinh x$	
$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$	
$\coth x$	$-\frac{1}{\sinh^2 x}$	
$\operatorname{arsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	
$\operatorname{arcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	
$\operatorname{arctanh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$	$= (\operatorname{arcoth} x)'$

Základní pravidla pro výpočet derivací

$$(f + g)' = f' + g'$$
$$(fg)' = f'g + fg' \qquad \Rightarrow \qquad (cf)' = cf'$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$$
$$[f(g(x))]' = f' \cdot g' = \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \qquad \text{kde } y = g(x), z = f(y)$$
$$[f^{-1}(y)]' = \frac{1}{f'(x)} \Big|_{x=f^{-1}(y)} \qquad \text{kde } y = f(x), x = f^{-1}(y)$$

④ ověření několika vzorců :

• $f(x) = c$

$$f'(x_0) \equiv \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\overset{\equiv 0}{c - c}}{x - x_0} = 0 \checkmark \forall x_0 \quad \text{tedy } f'(x) \equiv 0 \quad \text{Q.E.D.}$$

• $f(x) = x^2$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{(x - x_0)} = x_0 + x_0 = 2x_0 \quad \forall x_0$$

tedy $f'(x) = 2x$ Q.E.D.

• $f(x) = x^3$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^3 - x_0^3}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x^2 + x_0x + x_0^2)}{(x - x_0)} = x_0^2 + x_0^2 + x_0^2 = 3x_0^2 \quad \forall x_0$$

tedy $f'(x) = 3x^2$ Q.E.D.

• $f(x) = e^x$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} e^{x_0} \frac{e^{x-x_0} - 1}{x - x_0} = e^{x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^{x-x_0} - 1}{x - x_0} = e^{x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^{x-x_0} - 1}{x - x_0} = e^{x_0}$$

neboť platí (viz Taylorův rozvoj dále)

$$e^{x-x_0} = 1 + (x-x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} + \dots$$

tedy $f'(x) = e^x$

• $f(x) = \sin x$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2 \cos \frac{x+x_0}{2} \sin \frac{x-x_0}{2}}{x - x_0} = \cos x_0 \quad \forall x_0$$

Taylor $\sin \frac{x-x_0}{2} = \frac{x-x_0}{2} - \frac{1}{3!} \left(\frac{x-x_0}{2}\right)^3 + \dots$

tedy $f'(x) = \cos x$

• $f(x) = \cos x$

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-2 \sin \frac{x+x_0}{2} \sin \frac{x-x_0}{2}}{x - x_0} = -\sin x_0 \quad \forall x_0$$

tedy $f'(x) = -\sin x$

5

B : zapamatovat si hlavně
pro $f(x), g(x)$

{	$(f+g)' = f' + g'$	: <u>součet</u>
	$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$	: <u>součin</u>
	$(c \cdot f)' = c \cdot f'$	: <u>násobek konstantou</u>
	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$	: <u>podíl</u>

Příklady :

- $(3x^2 + \cos x)' \stackrel{\text{součet}}{=} (3x^2)' + (\cos x)' \stackrel{\text{konst.}}{=} 3(x^2)' - \sin x =$
 $= 3 \cdot 2x - \sin x = \underline{\underline{6x - \sin x}}$
- $(x - \arctan x)' \stackrel{\text{součet}}{=} (x)' - (\arctan x)' = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1+x^2-1}{1+x^2} = \underline{\underline{\frac{x^2}{1+x^2}}}$
- $(x^2 \sin x)' \stackrel{\text{součin}}{=} (x^2)' \sin x + x^2 (\sin x)' = 2x \sin x + \underline{\underline{x^2 \cos x}}$
- $(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' \stackrel{\text{podíl}}{=} \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} =$
 $= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \underline{\underline{\frac{1}{\cos^2 x}}}$

ještě 2 další důležitá pravidla:

- derivace složené funkce:

mějme dvě funkce $z = f(y)$ a $y = g(x)$, pak derivace složené funkce $z(x) = f(g(x))$ se spočítá vzorcem

$[f(g(x))]' = f' \cdot g' \quad \text{neboli} \quad \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} (x)$

tzv. „řetězové pravidlo“

6

Příklady:

• $[e^{3x}]' = \underbrace{(e^y)'}_{\substack{\text{derivace} \times \\ \text{vnějšího}}} \cdot \underbrace{(3x)'}_{\substack{\text{derivace} \\ \text{vnitřního}}} = \underline{3e^{3x}}$

tedy e^y kde $y = 3x$
 $= e^y \uparrow$ dosadit pomocí x

• $[\sin(x^2)]' = \underbrace{(\sin y)'}_{\substack{\sin y \\ y = x^2}} \cdot \underbrace{(x^2)'}_{2x} = \underline{2x \cos(x^2)}$

• $[\sqrt{1+x^2}]' = \underbrace{(\sqrt{y})'}_{\substack{\sqrt{y} \\ y = 1+x^2}} \cdot \underbrace{(1+x^2)'}_{2x} = \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \underline{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}$

$(y^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$

• ztd. 3 složené funkce :

$[\ln(\operatorname{tg}(2x))]'$ = $\underbrace{(\ln z)'}_{\substack{\ln z \\ z = \operatorname{tg} y \\ y = 2x}} \cdot \underbrace{(\operatorname{tg} y)'}_{\substack{\frac{1}{\cos^2 y}}}$ $\cdot \underbrace{(2x)'}_2 = \frac{2}{\cancel{z} \cdot \cos^2 y} =$

$= \frac{2}{\operatorname{tg}(2x) \cdot \cos^2(2x)} = \frac{2}{\frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} \cdot \cos^2(2x)} = \frac{2}{\sin(2x) \cdot \cos(2x)}$

$= \underline{\underline{\frac{4}{\sin(4x)}}}$

neboli symbolicky pro $f(z(y(x)))$ je derivace

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dz} \cdot \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}$$

7

• derivace inverzní funkce:

mějme fci $Y = f(x)$, k ní inverzní je $x = f^{-1}(Y)$
derivace této inverzní fce $f^{-1}(Y)$ se počítá

$$[f^{-1}(Y)]' = \frac{1}{f'(x)} \quad \left| \begin{array}{l} \text{kde dosadíme} \\ x = f^{-1}(Y) \end{array} \right.$$

Příklady:

• $Y = f(x) = e^x$ inverzní je $x = f^{-1}(Y) = \ln Y$

$$[\ln Y]' = \frac{1}{f'} \Big|_{x=\ln Y} = \frac{1}{e^x} \Big|_{x=\ln Y} = \frac{1}{e^{\ln Y}} = \frac{1}{Y}$$

$$f' = (e^x)' = e^x$$

tedy po přeznačení $Y \rightarrow x$ dostáváme

$$[\ln x]' = \frac{1}{x} \quad \text{což je přesně 4. řádek tabulky}$$

• podobně arcsin, arccos, arctan atd.

např.

$X = \arcsin Y = f^{-1}(Y)$ inverzní k $Y = f(x) = \sin x$
 $f'(x) = \cos x$

$$[\arcsin Y]' = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} \Big|_{x=\arcsin Y} = \frac{1}{\sqrt{1-Y^2}}$$

tedy

$$[\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{což je 12. řádek tabulky}$$

8

Derivace derivací

neboli „derivace vyšších řádů“

derivace $f(x)$ je (jino) $f'(x)$ a lze ji opět derivovat

píšeme: 2. derivace $f(x)$ je

3. derivace $f(x)$ je
: indukcí

n -tá derivace

$$f''(x) \stackrel{\text{def.}}{=} [f'(x)]'$$

$$f'''(x) \stackrel{\text{def.}}{=} [f''(x)]'$$

$$f^{(n)}(x)$$

ekvivalentně

$$\frac{d^2 f}{dx^2}$$

$$\frac{d^3 f}{dx^3}$$

$$\frac{d^n f}{dx^n}$$

Snadné: „kdo umí derivovat, umí derivovat n -krát“

velmi důležitá aplikace:

Taylorův rozvoj funkce

hledejme co nejlepší aproximaci hladké funkce $f(x)$ v okolí $x=0$ polynomem libovolného stupně:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \stackrel{\text{Taylorova řada}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

volba koeficientů a_n :

- dosadíme $x=0$ do $f(x) \Rightarrow a_0 = f(0)$
- dosadíme $x=0$ do $f'(x) = 0 + a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots \Rightarrow a_1 = f'(0)$
- dosadíme $x=0$ do $f''(x) = 0 + 0 + 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + \dots \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2} f''(0)$
- dosadíme $x=0$ do $f'''(x) = 0 + 0 + 0 + 3 \cdot 2a_3 + \dots \Rightarrow a_3 = \frac{1}{3!} f'''(0)$
- : dle
- dosadíme $x=0$ do $f^{(n)}(x) \Rightarrow a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$

(9)

tedy

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} f^{(m)}(0) \cdot x^m$$

$$\text{kde } \begin{cases} 0! \equiv 1 \\ f^{(0)} \equiv f(x) \end{cases}$$

$$\equiv f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{1}{2} f''(0) \cdot x^2 + \frac{1}{6} f'''(0) \cdot x^3 + \dots$$

Taylor, 1715

(f hládka, otáčka konv.)

obecněji : rozvoj kolem $x_0 \rightarrow$ vyčíslení $f(x)$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \underbrace{(x-x_0)}_{\Delta x} + \frac{1}{2} f''(x_0) \underbrace{(x-x_0)^2}_{(\Delta x)^2} + \dots$$

Příklady a užití:

• $f(x) = e^x \Rightarrow f' = e^x \quad f'' = e^x \quad f''' = e^x \quad \text{atd.}$
 $f(0) = 1 \quad f'(0) = 1 \quad f''(0) = 1 \quad f'''(0) = 1 \quad \text{atd.} \quad \text{takže}$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

neboli pro velmi
malé x platí aproximace

$$e^x \doteq 1 + x$$

• $f(x) = \sin x \quad f' = \cos x \quad f'' = -\sin x \quad f''' = -\cos x \quad f^{(4)} = +\sin x \quad \text{atd.}$
 $f(0) = \underline{0} \quad f'(0) = \underline{1} \quad f''(0) = \underline{0} \quad f'''(0) = \underline{-1} \quad f^{(4)}(0) = \underline{0} \quad \text{atd.}$
 ∇ totéž jako $f(x)$: opakovaně

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

neboli

šichle mociny $\leftrightarrow$ šichle fce

$$\sin x \doteq x$$

Pro platit limitu
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

• $f(x) = \cos x \quad f'(0) = 1$: už máme spočítané, jen zderivujeme $f' = -\sin x$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

šichle mociny $\leftrightarrow$ šichle fce

$$\cos x \doteq 1 - \frac{x^2}{2}$$

• $f(x) = (1+x)^p \quad f' = p(1+x)^{p-1} \dots$
 $f(0) = 1 \quad f'(0) = p \dots$

$$(1+x)^p \doteq 1 + p \cdot x$$

(10)

Fyzikální aplikace

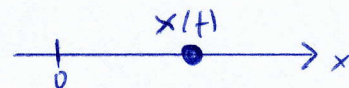
- popis pohybu: časová derivace se označuje tečkou
(kvůli zkrácení zápisu) nikoli čárkou

• lineární pohyb po přímcevzdálenostrychlostzrychlení

$$x(t)$$

$$v(t) \equiv \dot{x}(t)$$

$$a(t) \equiv \dot{v}(t) = \ddot{x}(t)$$



1. derivace

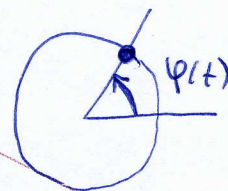
2. derivace

• pohyb po kružniciúhelúhlová rychlostúhlové zrychlení

$$\varphi(t)$$

$$\omega(t) \equiv \dot{\varphi}(t)$$

$$\varepsilon(t) \equiv \dot{\omega}(t) = \ddot{\varphi}(t)$$



1. derivace

2. derivace

Příklad: volný pád v homog. gravit. poli

$$\underline{x(t)} = \underline{\frac{1}{2} g t^2}$$

$$\underline{v(t)} = \dot{x} = \left(\frac{1}{2} g t^2\right)' = \frac{1}{2} g (t^2)' = \frac{1}{2} g \cdot 2t = \underline{g t} \quad \text{o.k.}$$

$$\underline{a(t)} = \ddot{x} = \dot{v} = (g t)' = g(t)' = g \cdot 1 = \underline{g} \quad \text{o.k.}$$

! důsledky $\frac{1}{2} g t^2$, stačí umět derivovat

• fyzikální zákony mají formu diferenciálních rovnic
 rovnice svazující funkci a její derivace

• Newtonův pohybový zákon $ma = F$, ale $a = \ddot{x}$, takže
 $m \ddot{x} = F$ zadáme hmotnost m a sílu $F(x, \dot{x})$,
 hledáme vzdálenost $x(t)$

• volný pohyb: $F = 0$ tedy rovnice $\ddot{x} = 0$
 tato diferenciální rovnice má obecné řešení $x(t) = x_0 + v_0 \cdot t$
libovolné 2 konstanty

Ověření: $\ddot{x} = [(x_0 + v_0 t)']' = [0 + v_0 \cdot 1]' = [v_0]' = 0$ o.k.

• volný pád: $F = mg = G$ rovnice $\ddot{x} = g$
 má obecné řešení $x(t) = \frac{1}{2} g t^2 + v_0 \cdot t + x_0$
spec: $g=0$: volný pohyb (přímocový)

Ověření: $\ddot{x} = [\frac{1}{2} g \cdot 2t + v_0 \cdot 1 + 0]' = \frac{1}{2} g \cdot 2 + 0 + 0 = g$ o.k.

• harmonický oscilátor: $F = -kx$ rovnice $m \ddot{x} = -kx \Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0$

$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ kde $\omega^2 = \frac{k}{m}$ má obecné řešení
lib. konst.
 $x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$ lib. konst. $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Ověření:
 $\dot{x} = A \cos(\omega t + \phi) \cdot (\omega t + \phi)' = A \omega \cdot \cos(\omega t + \phi)$
 $\omega \cdot 1 + 0 = \omega$
 $\ddot{x} = -A \omega \sin(\omega t + \phi) \cdot (\omega t + \phi)' = -A \omega^2 \sin(\omega t + \phi) = -\omega^2 x$ o.k. $\forall t$

• rozpad radioaktivních jader: počet N je fce času t : $N(t)$
 řídí se rovnicí $\dot{N} = -kN$ má obecné řešení $N(t) = N_0 e^{-k \cdot t}$
konst.

Ověření: $\dot{N} = N_0 (-e^{-kt})' = N_0 e^{-kt} (-k) = -kN$
 ? Jak hledat tato řešení diferenciálních rovnic? **INTEGRACI**

