

Integrál

funkce $f(x)$ je „opák její derivace“ $f'(x)$:

hledáme naopak takovou fci $F(x)$,
aby její derivace dala zadanou fci $f(x)$

neboli musí platit

$$F'(x) = f(x)$$

$\forall x$ „tedy odderivování“

- takové fci $F(x)$ se [nevhodně] říká „primitivní“ funkce k $f(x)$
- není jednoznačná : lze k ní přičíst libovolnou konstantu C
tedy $F(x) + C$ je také primitivní k $f(x)$

$$[\text{Důkaz: } (F+C)' = F' + C' = f + 0 = f, \text{ Q.E.D.}]$$

- proto se zavádí zvláštní symbol

$$\int f(x) dx \equiv F(x) + C$$

tzv: neurčitý integrál $\equiv$ množina všech primitivních fci k $f(x)$
(liší se jen o libovolnou konstantu C)
funkce $f(x)$ přes proměnnou x

- za chvíli uvidíme, proč se používá tak složitý symbol

Praktické počítání integrálů $\int f(x) dx$

- (A) tabulka integrálů elementárních funkcí
- (B) pravidla pro jejich kombinace

OTOČTE ROZDANOU TABULKU

- (A): stačí prohodit 1. a 2. sloupec tabulky derivací!

např.: $g = \sin x$ $\xrightarrow{\text{derivace}}$ $g' = \cos x$
takže platí $F = \sin x$ $\xleftarrow{\text{integrál}}$ $f = \cos x$

„integrál $\cos x$ je $\sin x$, protože derivace $\sin x$ je $\cos x$ “

Neurčité integrály elementárních funkcí

$f(x)$	$\int f(x) dx - C$	poznámka
0	c	$c = \text{konst.}$
1	x	
x^n	$\frac{1}{n+1} x^{n+1}$	$n \in R, n \neq -1$
e^x	e^x	
$\frac{1}{x}$	$\ln x $	
$\sin x$	$-\cos x$	
$\cos x$	$\sin x$	
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x$	
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$	$= -\arccos x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$= -\operatorname{arccot} x$
$\sinh x$	$\cosh x$	
$\cosh x$	$\sinh x$	
$\frac{1}{\cosh^2 x}$	$\tanh x$	
$\frac{1}{\sinh^2 x}$	$-\coth x$	
$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{arcsinh} x$	$= \ln x + \sqrt{x^2 + 1} $
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{arccosh} x$	$= \ln x + \sqrt{x^2 - 1} $
$\frac{1}{1-x^2}$	$\operatorname{arctanh} x$	$= \operatorname{arccoth} x$

Základní pravidla pro výpočet integrálů

$$\int (f + g) dx = \int f dx + \int g dx$$

$$\int cf dx = c \int f dx$$

$$\int f'g dx = fg - \int fg' dx$$

$$\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \left(\int f(y) dy \right) \Big|_{y=\varphi(x)}$$

Úvodní kurz z matematických metod fyziky
pro nastupující posluchače 1. ročníku MFF UK

Jiří Podolský, Praha, 25. – 26. 9. 2025

13) Zapsat si hlavní

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

ověření derivací: např.

$$(\int x^m dx)' = \left(\frac{x^{m+1}}{m+1} + C \right)' = \frac{1}{m+1} \cdot (m+1) x^{m+1-1} + 0 = x^m \quad \text{Q.E.D.}$$

B): hlavní pravidla

$$\int (f+g) dx = \int f dx + \int g dx$$

sovčet

$$\int c f dx = c \int f dx$$

vytknutí konstanty

$$\int f' g = f g - \int f \cdot g' dx$$

pravidlo "per partes"

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = \left(\int f(y) dy \right) \Big|_{y=\varphi(x)}$$

substituční metoda integrace

Příklady:

$$\begin{aligned} \int (x^2 + 2x + \frac{1}{x}) dx &= \int x^2 dx + \int 2x dx + \int \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{1}{3} x^3 + x^2 + \ln|x| + C \end{aligned}$$

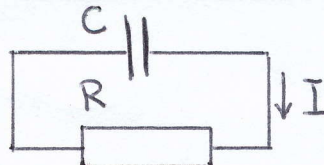
(ověření derivací)

$$\begin{aligned} \int \tan^2 x dx &= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int 1 dx \\ &= \tan x - x + C \end{aligned}$$

$$\int \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^4}} dx = \int \sqrt{\frac{1+x^2}{(1+x^2)(1-x^2)}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C$$

14

vybití kondenzátoru



sovčet napětí v obvodu je nula: $U_R + U_C = 0$

$$RI + \frac{Q}{C} = 0$$

ale pozor! $I = \dot{Q}$ [proud je časová derivace náboje]

takže $R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = 0$

$$\dot{Q} = -\frac{1}{RC} Q$$

diferenciální rovnice: hledáme fci $Q(t)$, která ji řeší $\forall t$

postup řešení: přepíšeme do podoby

$$\frac{\dot{Q}}{Q} = -\frac{1}{RC}$$

neboli

$$(\ln Q)' = -\frac{1}{RC}$$

oprávdu: složená funkce

$$(\ln Q(t))' = \frac{d(\ln Q)}{dQ} \cdot \frac{dQ}{dt} = \frac{1}{Q} \dot{Q} \quad \text{o.k.}$$

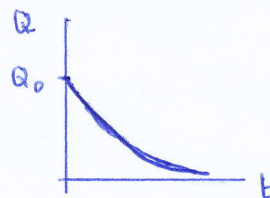
hledáme fci $\ln Q$, aby její derivace byla $-\frac{1}{RC}$,

tedy $\ln Q$ je rovná integrálu fce $-\frac{1}{RC}$

$$\ln Q = \int \underbrace{-\frac{1}{RC}}_{\text{konstanta}} dt = -\frac{1}{RC} \int 1 \cdot dt = -\frac{1}{RC} t + \text{const} \quad | e^{\circ}$$

$$Q = e^{-\frac{1}{RC}t + \text{const}} = \underbrace{e^{\text{const}}}_{Q_0} \cdot e^{-\frac{1}{RC}t}$$

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{1}{RC}t}$$



tedy pokles náboje je exponenciální

podobně jako rozpad radioaktivních jader:

rovnice $\dot{N} = -kN$ má řešení $N(t) = N_0 e^{-kt}$

: stejný typ

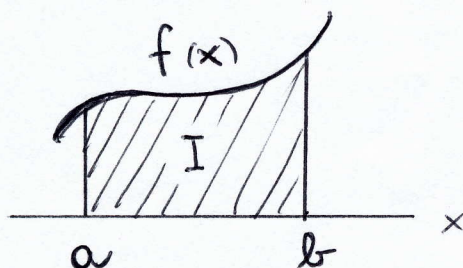
(15)

Určitý integrálz funkce $f(x)$ od a do b tzv. meze integrálu

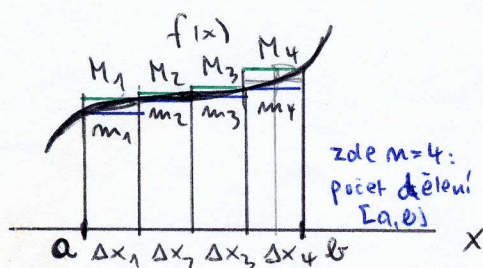
je číslo

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

má geometrický význam:

 I je plocha pod grafem $f(x) \geq 0$
v mezích $[a, b]$


Oprava:

Cauchyho - Riemannova definice
 $\int_a^b f(x) dx$ pomocí ^{horního} ~~dolního~~ odhadu:
neboli součtu obdélníků s ^{max} výškami:

$$m_i = \min_{x \in \Delta x_i} f(x)$$

$$M_i = \max_{x \in \Delta x_i} f(x)$$

$$\sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i \leq I \leq \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$$

v limitě $n \rightarrow \infty$ se oba odhady blíží k sobě
 I : „drží mezi sebou“

v tomto smyslu platí

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$$

což vysvětluje volbu symbolu $\int_a^b f(x) dx$ Jak se určitý integrál prakticky počítá?

Pomocí neurčitého integrálu : velmi důležitá věta:

Newtonova - Leibnizova formule

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

píšeme symbolicky

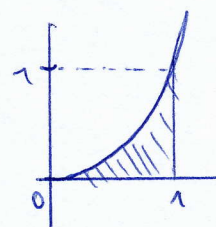
$$\text{kde } F(x) = \int f(x) dx$$

„I získáme odečtením čísel, což jsou horní a dolní meze
dosazené do primitivní fce“

Integrovací konstanta C zde
nehraje roli: odečítání

Příklady:• plocha pod parabolou $y = x^2$ na intervalu $[0, 1]$

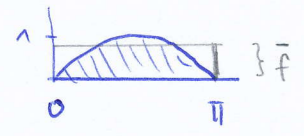
$$S = \int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{3} 1^3 - \frac{1}{3} 0^3 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$



16

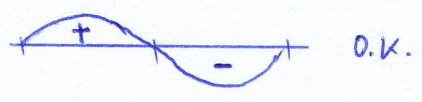
• průměrná (střední) hodnota $f(x) = \sin x$ na intervalu $[a, b] = [0, \pi]$

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{\pi-0} \int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{1}{\pi} [-\cos x]_0^{\pi} = \frac{1}{\pi} (-\cos \pi - (-\cos 0))$$
$$= \frac{1}{\pi} (1+1) = \frac{2}{\pi} \approx 0,64$$



• totéž pro interval $[a, b] = [0, 2\pi]$

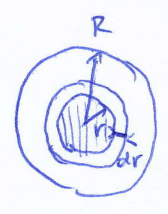
$$\bar{f} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin x dx = \frac{1}{2\pi} [-\cos x]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi} (-1 - (-1)) = 0$$



• odvoďte vzorec pro objem koule : sférické sloupky :

$$V \approx \sum_{i=1}^n S \cdot \Delta r \quad \text{kde } S = 4\pi r^2 \text{ je povrch koule poloměru } r$$

$\lim_{n \rightarrow \infty}$: Δr je tloušťka vrstvičky



$$V = \int_0^R 4\pi r^2 dr = \left[4\pi \frac{r^3}{3} \right]_0^R = \frac{4}{3}\pi R^3$$

• spočítejte obvod kružnice poloměru a

vzorec pro délku křivky dané $f(x)$ $y = f(x)$ od $[a, b]$ je

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f')^2} dx$$

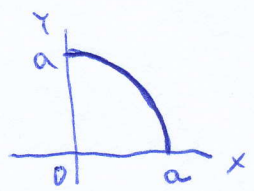
Odvození : $l \approx \sum_{i=1}^n \Delta l$ kde $\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$
vytknutí Δx :

$$l \approx \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \Delta x$$

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

$\equiv y'(x) \equiv f'(x)$

(1/4):



$$x^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow f(x) = y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

tedy

$$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{-2x}{\sqrt{a^2 - x^2}} \Rightarrow \sqrt{1 + (f')^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

$$l = 4 \cdot \int_0^a \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = 4 \int_0^a \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2}} dx = 4 \left[a \cdot \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) \right]_0^a =$$

$F(x)$: lze ověřit z tabulky

$$= 4 \left(a \cdot \underbrace{\arcsin 1}_{\frac{\pi}{2}} - a \cdot \underbrace{\arcsin 0}_0 \right) = 4 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot a = 2\pi a \quad \text{o.k.}$$