

Matice

matice je tabulka čísel (reálných nebo komplexních)

matice typu (m, n) má $\left\{ \begin{array}{l} m \text{ řádků} \\ n \text{ sloupců} \end{array} \right\}$ tedy celkem $m \times n$ čísel
např.:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{typu } (2, 2) \quad \underline{\text{čtvercová}} \quad \text{neboť } m = n$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 7 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{typu } (2, 3) \quad \underline{\text{obdélníková}} \quad \text{neboť } m \neq n$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{typu } (3, 1) \quad \underline{\text{jediný sloupec: složky "vektorů" ve 3D}} \quad (n=1)$$

$$D = (\sqrt{2}, 14) \quad \text{typu } (1, 2) \quad \underline{\text{jediný řádek: složky "formy" ve 2D}} \quad (m=1)$$

prvky matice označujeme
(jednotlivá čísla)

$$a_{ij}$$

první index udává
řádek

druhý index udává
sloupec

např.:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} 1. \text{ řádek} \\ 2. \text{ řádek} \end{array}$$

$\uparrow$ 1. sloupec $\uparrow$ 2. sloupec

obecně:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

rovnost matic

$$A = B \quad \text{pokud} \quad a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i \forall j$$

matice A a B z předchozího příkladu se zjevně nerovnají
(dokonce jsou úplně jiného typu)

(M2)

• transponování matice A : je nová matice A^T taková, že

$$(a^T)_{ij} = a_{ji}$$

tedy prohození řádků se sloupci : evidentně $(A^T)^T = A$

napiš:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 7 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow B^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 0 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow C^T = (2 \ -1 \ 3)$$

vektor

příslušná "duální" forma

• čtvercová matice je

Symetrická když

$$a_{ij} = a_{ji}$$

napiš:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

6 nezávislých prvků
3 na diagonále
3 mimo diag.

tedy

$$A = A^T$$

antisymetrická když

$$a_{ij} = -a_{ji}$$

napiš:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 8 \\ -1 & 0 & -3 \\ -8 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

3 nezáv. prvky
na diagonále
musí být 0, neboť
ještě 0 = -0
3 mimo diag.

tedy

$$-A = A^T$$

• nulová matice O

$$a_{ij} = 0$$

$$\forall i \forall j \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

• jednotková matice E

$$a_{ij} = \delta_{ij}$$

Kroneckerův symbol: $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{na diagonále} \\ & (i=j) \\ 0 & \text{mimo diag.} \\ & (i \neq j) \end{cases}$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(M3)

Operace s maticemi

1. součet matic
(stejného typu)

$$C = A + B$$

definováno sčítáním prvků

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$\forall i \forall j$$

$$\text{n\acute{a}př. } \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

2. číselný násobek

$$B = cA$$

opět přes prvky

$$b_{ij} = c a_{ij}$$

$$\forall i \forall j$$

$$\text{n\acute{a}př. } 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 4 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matice stejného typu tvoří abstraktní vektorový prostor V !

dle definice v kapitole "vektory a jejich součiny"

Opravdu: jsou definovány 2 operace $\square + \square$ a $c\square$
splňující vlastnosti a) - h), tedy konkrétně

a) $A + B = B + A$

e) $c(dA) = (cd)A$

b) $(A + B) + C = A + (B + C)$

f) $1A = A$

c) $\exists ! 0 : A + 0 = A$

g) $(c + d)A = cA + dA$

d) $\exists ! 1 (-A) : A + (-A) = 0$

h) $c(A + B) = cA + cB$

O.K.

navíc ještě další důležité operace: násobení matic

je o něco složitější:

M4

násobení matic

$$C = AB$$

definováno:

prvek c_{ij} matice C se získá z prvků matic A a B tak, že

provedeme skalární součin i -tého řádku A
a j -tého ~~řádku~~ ^{sloupce} B

neboli

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{im}b_{mj}$$

↑ ↑
řádek i sloupec j

tedy pro (2,2):

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cdot & c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & \cdot \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

tedy

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

zprvu se zdá těžké, ale je to opravdu důležité: naučit se, natrénovat

"dělat z hlavy"

(M5)

Příklad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0 & 1+0 \\ 4+1 & 2+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2 & 0+1 \\ 1+6 & 0+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \quad (*)$$



evidentně

$$AB \neq BA$$

maticové násobení není komutativní: závisí na pořadí

definuje se další důležitý pojem:

- komutátor matic:

$$[A, B] \equiv AB - BA$$

obecně $\neq 0$

rozdíl násobení v opačném pořadí

- Příklad (*) $[A, B] \equiv AB - BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \neq 0$

- Příklad z fyziky: takzvané Pauliho matice: operátory spinu v QM

3 komplexní matice $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

spočítejme jejich násobky a komutátory:

$$\underline{\sigma_x \sigma_y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \underline{i \sigma_z}$$

$$\underline{\sigma_y \sigma_x} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \underline{-i \sigma_z}$$

$$\underline{[\sigma_x, \sigma_y]} \equiv \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_x = i \sigma_z - (-i \sigma_z) = \underline{2i \sigma_z}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{tedy} \quad [\sigma_x, \sigma_y] = 2i \sigma_z \\ \text{a podobně} \quad [\sigma_y, \sigma_z] = 2i \sigma_x \\ \quad \quad \quad [\sigma_z, \sigma_x] = 2i \sigma_y \end{array} \right\}$$