

Parciální derivace

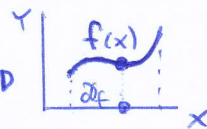
zobecnění pojmu derivace na funkce více proměnných

• dosud :

$$Y = f(x)$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

znázornění grafem 1D

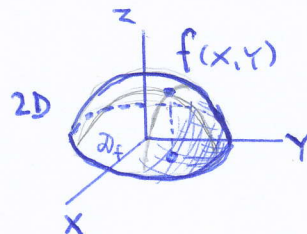


• nyní :

$$Z = f(x, y)$$

$$f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

znázornění křivou plochou 2D



2 nezávislé proměnné

• obecně :

$$Y = f(\underbrace{x_1, \dots, x_n}_{m\text{-krát}}) \quad f: \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

m nezávislých proměnných

zde např. $Z = f(x, y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$
hemisféra $z \geq 0$

• derivace $f(x)$ je

změna f při změně x : směrnice tečny ke grafu

• derivace $f(x, y)$ je

změna f

! NYNÍ 2 MOŽNOSTI !

při změně x (y pevně)

při změně y (x pevně)

parciální derivace f podle x :

[edstejná]

$$\frac{\partial f}{\partial x} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{df}{dx} (x, y = y_0 \text{ konstantní})$$

parciální derivace f podle y :

$$\frac{\partial f}{\partial y} \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{df}{dy} (x = x_0 \text{ konstantní}, y)$$

"vlastně normálně derivujeme podle proměnné,
zatímco druhou proměnnou považujeme za konstantu"

KDO UMÍ DERIVOVAT, UMÍ DERIVOVAT PARCIÁLNĚ

Příklad :

$$f(x, y) = x^3 y^2 + 2xy^3$$

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial x} = (x^3)' y^2 + (2x)' y^3 = \underline{3x^2 y^2 + 2y^3}$$

$$\bullet \frac{\partial f}{\partial y} = x^3 (y^2)' + 2x (y^3)' = x^3 \cdot 2y + 2x \cdot 3y^2 = \underline{2x^3 y + 6x y^2}$$

PD2) parciální derivace $f(x, y)$ je opět funkce (x, y) ,
takže ji lze zase derivovat: znova máme 2 možnosti $\leftarrow \begin{matrix} \text{dlex} \\ \text{dley} \end{matrix}$

parciální derivace vyšších řádů:

• 4 derivace 2. řádu:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

$\uparrow$ pak $\uparrow$ nejprve

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

takzvané
smíšené derivace
(liši se jen pořadím)
ve fyzice obvykle stejné...
[když jsou spojitě v okolí]

• 8 derivací 3. řádu:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right)$$

atd.

Příklad:

$$f(x, y) = x^3 y^2 + 2xy^3 \quad \text{viz výše}$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} (3x^2 y^2 + 2y^3) = 6xy^2 + 0 = \underline{6xy^2}$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} (2x^3 y + 6xy^2) = \underline{2x^3 + 12xy}$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} (3x^2 y^2 + 2y^3) = \underline{6x^2 y + 6y^2}$$

$$\bullet \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} (2x^3 y + 6xy^2) = \underline{6x^2 y + 6y^2}$$

> opravdu zde stejné

Fyzikální aplikace

fyzikální pole (např. teplotní, tlakové, elektrické, magnetické)
jsou funkce tří prostorových souřadnic $(x, y, z) \equiv \vec{r}$

parciální derivace udávají změnu polí ve směru x, y, z

např. $\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}$ jsou změny teploty ve směrech x, y, z

lze zkombinovat do vektoru gradientu teploty $T(x, y, z)$
(má směr a velikost!)

$$\text{grad } T \equiv \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

vektor,
jehož 3 složky
jsou 3 parciální derivace

takto definovaný vektor udává směr největšího růstu fce $T(x, y, z)$

podobně grad p je gradient tlaku

grad φ je gradient elektrického potenciálu

atd.

Příklad: teplotní pole je dáno vztahem

$$T(x, y, z) = T_0 + C \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = T_0 + C \cdot r$$

↑ ↑
konstanta r

tedy lineárně roste s
radialní vzdáleností od centra

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 + C \cdot \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} = C \cdot \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = C \frac{x}{r}$$

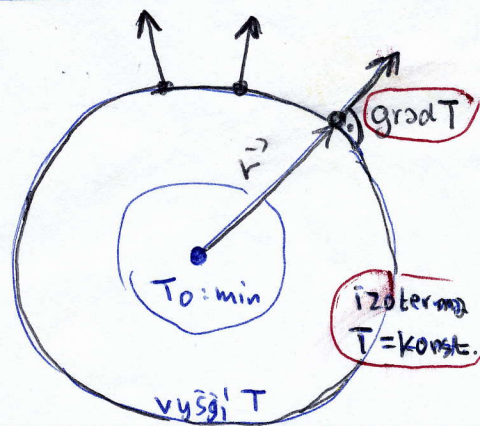
$$\frac{\partial T}{\partial y} \text{ totéž, jen } x \leftrightarrow y \quad \text{a} \quad \frac{\partial T}{\partial z} \text{ jen } x \leftrightarrow z \text{ tedy}$$

$$\text{grad } T \equiv \left(\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \left(C \frac{x}{r}, C \frac{y}{r}, C \frac{z}{r} \right)$$

což je

$$\text{grad } T = \frac{C}{r} \vec{r}$$

radialní vektor, tedy opravdu směr max. růstu



grad T je vektor, který je
všude kolmý na izotermu $T = \text{konst.}$

PD4

totéž v elektrostátice

- potenciál bodového náboje je
 - ekvipotenciály $\varphi = \text{konst.}$ jsou sféry
 - kolmice k nim jsou radiály
- ! to je právě směr elektrického pole $\vec{E}$!

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

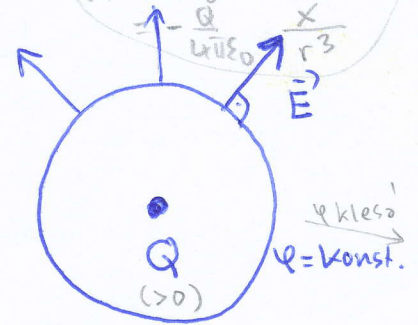
$$\text{grad } \varphi = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^3} \vec{r}$$

$$\vec{E} \equiv - \text{grad } \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

znaménková konvence

Coulombův zákon
 $E(r) = |\vec{E}(r)|$

jednotkový
radiální
vektor



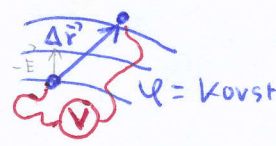
$$\text{tedy } \vec{E} = (E_x, E_y, E_z) = - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)$$

vztah k napětí a vykonané práci:

- rozdíl (blízkých) potenciálů je napětí U

$$U = \Delta \varphi \approx \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Delta z$$

neboli $U \equiv \text{grad } \varphi \cdot \Delta \vec{r} = - \vec{E} \cdot \Delta \vec{r}$



- práce W vykonaná přemístěním náboje q:

$$W \equiv - q U = + q \vec{E} \cdot \Delta \vec{r} = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}$$

konvence

neboť $\vec{F} = q \vec{E}$

pokud je $\vec{F}$ konstantní!
obecně nutno integrovat

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

tzv. křivkový integrál podél dráhy náboje q

- počítá se v kartézských souřadnicích takto:

$$\begin{cases} \vec{F} = (F_x, F_y, F_z) \\ d\vec{r} \approx \frac{d\vec{r}}{ds} ds = (x'(s), y'(s), z'(s)) ds \end{cases}$$

takže

$$W = \int_{s_{\text{začátek}}}^{s_{\text{konec}}} (F_x x' + F_y y' + F_z z') ds$$

křivka dána parametricky
 $(x(s), y(s), z(s))$, kde s je parametr

$$= \int_{s_z}^{s_x} f(s) ds \quad \dots \text{určitý integrál}$$

"konzervativní pole"

pro silové pole $\vec{F}$ s potenciálem φ výsledek NEzávisí na křivce, jen na poč. a konc. bodech