Úvodní kurz matematických metod fyziky

pro nastupující posluchače 1. ročníku MFF UK

Přehledové materiály

prof. RNDr. Pavel Krtouš, Ph.D.

Diferenciální počet

Definice derivace

Funkce $f(x)$ má v bodě x_o derivaci rovnou konečné hodnotě $f'(x_\mathrm{o})$ pokud pro dostatečně malá ε platí

$$f'(x_\mathrm{o}) \quad = \quad \frac{f(x_\mathrm{o}+\varepsilon)-f(x_\mathrm{o})}{\varepsilon} \quad + \quad \text{malá chyba}$$

Pokud lze derivaci $f'(x_\mathrm{o})$ určit pro všechny hodnoty x_o, dostáváme novou funkci $f'(x)$ nazývanou derivace funkce $f(x)$.

Používáme též značení

$$f' \quad \equiv \quad \frac{df}{dx}$$

Lineární aproximace funkce pomocí derivace

Funkce $f(x)$ lze v okolí hodnoty x_o aproximovat lineární závislostí plynoucí z definice derivace

$$f(x_\mathrm{o}+\varepsilon) \quad = \quad f(x_\mathrm{o}) \quad + \quad f'(x_\mathrm{o})\,\varepsilon \quad + \quad \text{chyba řádu } \varepsilon^2$$

Alternativně tuto aproximaci můžeme zapsat

$$f(x+dx) \quad = \quad f(x) \quad + \quad \frac{df}{dx}(x)\,dx \quad + \quad \text{chyba řádu } dx^2$$

Pokud je funkce ‘slušná’, lze aproximace vylepšovat do vyšších řádů.

Pravidla pro derivace

$\mathcal{D}\mathbf{I}$ $\quad (h+g)' = h' + g'$

$\mathcal{D}\mathbf{II}$ $\quad (af)' = af'$

$\mathcal{D}\mathbf{III}$ $\quad (gh)' = g'h + gh'$

$\mathcal{D}\mathbf{IV}$ $\quad \left(\dfrac{g}{h}\right)' = \dfrac{g'\,h - g\,h'}{h^2}$

$\mathcal{D}\mathbf{V}$ $\quad f'(x) = g'\big(h(x)\big)\; h'(x) \quad$ kde $\quad f(x) = g\big(h(x)\big)$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\,\frac{dy}{dx} \qquad \text{kde } \ z(x) = z\big(y(x)\big)$$

$\mathcal{D}\mathbf{VI}$ $\quad (f^{\mathrm{inv}})'(x) = \dfrac{1}{f'\big(f^{\mathrm{inv}}(x)\big)}$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \qquad \text{kde } x(y) \text{ je inverzní k } y(x)$$

$\mathcal{D}\mathbf{0}$ $\quad \mathrm{konst}' = 0$

$\mathcal{D}\mathbf{1}$ $\quad (x^n)' = n\,x^{n-1}$

$\mathcal{D}\mathbf{2}$ $\quad \sin' x = \cos x \qquad \cos' x = -\sin x$

$\quad \tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad \cot' x = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$\mathcal{D}\mathbf{3}$ $\quad \exp' x = \exp x \qquad \big(a^x\big)' = (\log a)\, a^x$

$\mathcal{D}\mathbf{4}$ $\quad \log' x = \frac{1}{x} \qquad \log_a' x = \frac{1}{x\,\log a}$

$\mathcal{D}\mathbf{5}$ $\quad \arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$\quad \arctan' x = \frac{1}{1+x^2} \qquad \mathrm{arccot}' x = -\frac{1}{1+x^2}$

$\mathcal{D}\mathbf{6}$ $\quad \mathrm{sh}' x = \mathrm{ch}\, x \qquad \mathrm{ch}' x = \mathrm{sh}\, x$

$\quad \mathrm{th}' x = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x} \qquad \mathrm{cth}' x = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$

$\mathcal{D}\mathbf{7}$ $\quad \mathrm{arcsh}' x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \mathrm{arcch}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

$\quad \mathrm{arcth}' x = \frac{1}{1-x^2} \qquad \mathrm{arccth}' x = \frac{1}{1-x^2}$

Integrální počet

Definice integrálu

Integrál reprezentuje “spojitou” sumu – součet velmi mnoha velmi malých hodnot.

Integrál funkce $f(x)$ na intervalu $x \in \langle a, b \rangle$ je

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx \;\; = \;\; \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\, dx \;\; + \;\; \text{malá chyba}$$

kde interval $\langle a, b \rangle$ je rozdělen na dostatečně velký počet N malých intervalů délky $dx = \frac{b-a}{N}$

a x_i jsou zvolené hodnoty v těchto intervalech (např. koncové body intervalů $x_i = a + i\; dx$).

Newtonův vzorec

Integrování je “inverzní” operace k derivování

$$\int_a^b F'(x)\,dx \quad = \quad F(b) - F(a)$$

často používáme zkrácené označení $\big[\,F\,\big]_a^b = F(b) - F(a)$.

Primitivní funkce a neurčitý integrál

Primitivní funkce F k funkci f nazýváme "invertovanou" derivaci, tj. funkci splňující

$$F' = f$$

Primitivní funkci označujeme též pomocí neurčitého integrálu (integrálu bez mezí)

$$F = \int f \, dx$$

Newtonův vzorec nám dává vztah integrálu na intervalu a primitivní funkce

$$\int_a^b f \, dx = F(b) - F(a)$$

Primitivní funkce je určena až na konstantu, tj. F a $F +$ konst. jsou primitivní funkce téže funkce f.

Pravidla pro integrály

$\mathcal{I}\mathbf{0}$ $$\int f'\,dx = \big[\,f\,\big] \qquad \text{Newtonův vzorec}$$

$\mathcal{I}\mathbf{I}$ $$\int (g+h)\,dx = \int g\,dx + \int h\,dx$$

$\mathcal{I}\mathbf{II}$ $$\int af\,dx = a\int f\,dx$$

$\mathcal{I}\mathbf{III}$ $$\int g'\,h\,dx = \big[\,g\,h\,\big] - \int g\,h'\,dx$$

$\mathcal{I}\mathbf{IV}$ $$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f\big(x(\xi)\big)\,\frac{dx}{d\xi}\,d\xi$$

$$\int\limits_\alpha^\beta h\big(x(\xi)\big)\,d\xi = \int\limits_a^b h(x)\,\frac{d\xi}{dx}\,dx$$

substituce $x = x(\xi)$ s inverzí $\xi = \xi(x)$
meze $a = x(\alpha)$, $b = x(\beta)$

$\mathcal{I}\mathbf{1}$ $$\int x^n\,dx = \tfrac{1}{n+1}\,x^{n+1}$$

$\mathcal{I}\mathbf{2}$ $$\int \sin x\,dx = -\cos x \qquad \int \cos x\,dx = \sin x$$
$$\int \tan x\,dx = -\log\big(\cos x\big) \qquad \int \cot x\,dx = \log\big(\sin x\big)$$

$\mathcal{I}\mathbf{3}$ $$\int \exp x\,dx = \exp x \qquad \int a^x\,dx = \tfrac{1}{\log a}\,a^x$$

$\mathcal{I}\mathbf{4}$ $$\int \frac{1}{x}\,dx = \log x \qquad \int \log x\,dx = -x + x\log x$$

$\mathcal{I}\mathbf{5}$ $$\int \tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x \qquad \int \tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\arccos x$$
$$\int \tfrac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x \qquad \int \tfrac{1}{1+x^2}\,dx = -\operatorname{arccot} x$$

$\mathcal{I}\mathbf{6}$ $$\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x \qquad \int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x$$
$$\int \operatorname{th} x\,dx = \log\big(\operatorname{ch} x\big) \qquad \int \operatorname{cth} x\,dx = \log\big(\operatorname{sh} x\big)$$

$\mathcal{I}\mathbf{7}$ $$\int \tfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \operatorname{arcsh} x \qquad \int \tfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \operatorname{arcch} x$$
$$\int \tfrac{1}{1-x^2}\,dx = \operatorname{arcth} x \qquad \int \tfrac{1}{1-x^2}\,dx = \operatorname{arccth} x$$

Maticový počet

Počítání se sloupečky, řádky a maticemi

Objekty složené z čísel

sloupec

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \vdots \\ a^n \end{bmatrix}$$

řádek

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix}$$

matice

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} A_1^1 & A_2^1 & \cdots & A_n^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & \cdots & A_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_1^n & A_2^n & \cdots & A_n^n \end{bmatrix}$$

Sčítání a násobení číslem

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} a^1+b^1 \\ \vdots \\ a^n+b^n \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} A_1^1+B_1^1 & \cdots & A_n^1+B_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ A_1^n+B_1^n & \cdots & A_n^n+B_n^n \end{bmatrix} \qquad r\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} r\alpha_1 & \cdots & r\alpha_n \end{bmatrix} \qquad r\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} rA_1^1 & \cdots & rA_n^1 \\ \vdots & & \vdots \\ rA_1^n & \cdots & rA_n^n \end{bmatrix}$$

Násobení řádku a sloupečku

$$r \;=\; \boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{a} \;=\; \begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a^1\\ a^2\\ \vdots\\ a^n\end{bmatrix} \;=\; \alpha_1\,a^1+\alpha_2\,a^2+\cdots+\alpha_n\,a^n \qquad r=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\,a^k$$

Násobení sloupečku maticí

$$\boldsymbol{b} \;=\; \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{a} \;=\; \begin{bmatrix}A^1_1 & A^1_2 & \cdots & A^1_n\\ A^2_1 & A^2_2 & \cdots & A^2_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ A^n_1 & A^n_2 & \cdots & A^n_n\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}a^1\\ a^2\\ \vdots\\ a^n\end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix}A^1_1\,a^1+A^1_2\,a^2+\cdots+A^1_n\,a^n\\ A^2_1\,a^1+A^2_2\,a^2+\cdots+A^2_n\,a^n\\ \vdots\\ A^n_1\,a^1+A^n_2\,a^2+\cdots+A^n_n\,a^n\end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix}b^1\\ b^2\\ \vdots\\ b^n\end{bmatrix} \qquad b^i=\sum_{k=1}^{n}A^i_k\,a^k$$

Násobení řádku a matice

$$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}A^1_1 & A^1_2 & \cdots & A^1_n\\ A^2_1 & A^2_2 & \cdots & A^2_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ A^n_1 & A^n_2 & \cdots & A^n_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_1A^1_1+\cdots+\alpha_nA^n_1 & \alpha_1A^1_2+\cdots+\alpha_nA^n_2 & \cdots & \alpha_1A^1_n+\cdots+\alpha_nA^n_n\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\beta_1 & \beta_2 & \cdots & \beta_n\end{bmatrix} \qquad \beta_j=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\,A^k_j$$

Násobení matic

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}A^1_1 & A^1_2 & \cdots & A^1_n\\ A^2_1 & A^2_2 & \cdots & A^2_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ A^n_1 & A^n_2 & \cdots & A^n_n\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}B^1_1 & B^1_2 & \cdots & B^1_n\\ B^2_1 & B^2_2 & \cdots & B^2_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ B^n_1 & A^n_2 & \cdots & B^n_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C^1_1 & \overbrace{C^1_2}^{A^1_1B^1_2+A^1_2B^2_2+\cdots+A^1_nB^n_2} & \cdots & A^1_n\\ C^2_1 & C^2_2 & \cdots & C^2_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ C^n_1 & C^n_2 & \cdots & C^n_n\end{bmatrix} \qquad C^i_j=\sum_{k=1}^{n}A^i_k\,B^k_j$$

Použití matic v geometrii

Vektory a jejich souřadnice

$\vec{a}$ – vektor v třídimenzionálním prostoru

báze vektorů = lineárně nezávislé vektory $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$

Každý vektor lze vyjádřit vůči zvolené bázi pomocí sloupečku souřadnic:

$$\vec{a} = a^1\,\vec{e}_1 + a^2\,\vec{e}_2 + a^3\,\vec{e}_3 \qquad \text{vektor } \vec{a} \;\leftrightarrow\; \text{souřadnice } \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix}$$

Operátory a jejich souřadnice

M – lineární operátor transformuje vektor na vektor

$$\vec{a} \;\rightarrow\; \vec{b} \;=\; \mathsf{M}\cdot\vec{a}$$

linearita:
$$\mathsf{M}\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = \mathsf{M}\cdot\vec{a} + \mathsf{M}\cdot\vec{b}$$
$$\mathsf{M}\cdot(r\vec{a}) = r\,\mathsf{M}\cdot\vec{a}$$

Každý operátor lze vyjádřit vůči zvolené bázi pomocí matice souřadnic:

$$\vec{b} \;=\; \mathsf{M}\cdot\vec{a} \quad\leftrightarrow\quad \boldsymbol{b} \;=\; \boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{a} \qquad \text{operátor } \mathsf{M} \;\leftrightarrow\; \text{souřadnice } \boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} M^1_1 & M^1_2 & M^1_3 \\ M^2_1 & M^2_2 & M^2_3 \\ M^3_1 & M^3_2 & M^3_3 \end{bmatrix}$$

Operátor rotace

Rotace v rovině

R_φ provádí rotaci vektoru o úhel φ

$$\vec{b} = \mathsf{R}_\varphi \cdot \vec{a}$$

V kartézských souřadnicích je tato rotace vyjádřena:

$$b^1 = \cos\varphi\ a^1 - \sin\varphi\ a^2$$
$$b^2 = \sin\varphi\ a^1 + \cos\varphi\ a^2$$

V řeči matic:

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{R}_\varphi \cdot \boldsymbol{a} \qquad \text{kde} \qquad \begin{bmatrix} b^1 \\ b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \end{bmatrix} \qquad \text{tj.} \qquad \boldsymbol{R}_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

Rotace v prostoru

Rotace kolem kartézských os $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$:

$$\boldsymbol{R}^1_\varphi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{R}^2_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{R}^3_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pomocí maticového násobení můžeme dostat souřadnice rotace $\boldsymbol{R}$ dané složením rotací podél různých os, např. $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}^1_\alpha \cdot \boldsymbol{R}^3_\beta$.

Maticová algebra

Matice umíme sčítat a násobit a výsledkem je opět matice. Matice tak zobecňují pojem obyčejných čísel, tvoří tzv. *algebru*. Platí pro ně základní vlastnosti sčítání a násobení.

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} \;=\; \boldsymbol{B}+\boldsymbol{A} \qquad \text{komutativita sčítání}$$

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C} \;=\; \boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) \qquad \text{asociativita sčítání}$$

$$(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C} \;=\; \boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}) \qquad \text{asociativita násobení}$$

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C} \;=\; \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C} \qquad \text{distributivita}$$

$$\boldsymbol{O}+\boldsymbol{A} \;=\; \boldsymbol{A}+\boldsymbol{O} \;=\; \boldsymbol{A} \qquad \text{nulová matice}$$

$$\boldsymbol{I}\cdot\boldsymbol{A} \;=\; \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{I} \;=\; \boldsymbol{A} \qquad \text{jednotková matice}$$

$$\boldsymbol{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Oproti obyčejným číslům je ale násobení obecně nekomutativní:

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} \;\neq\; \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} \qquad \text{pro obecné } \boldsymbol{A} \text{ a } \boldsymbol{B}$$

Míru nekomutativnosti vyjadřuje komutátor

$$\left[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\right] \;=\; \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$$

Inverzní matice

Inverzní matice $\boldsymbol{A}^{-1}$ k matici $\boldsymbol{A}$ je matice splňující

$$\boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} \quad = \quad \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} \quad = \quad \boldsymbol{I}$$

Inverze umožňuje řešit systém n lineárních rovnic o n neznámých zapsaný v maticovém tvaru:

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{x} \quad = \quad \boldsymbol{v} \qquad\qquad \Rightarrow \qquad\qquad \boldsymbol{x} \quad = \quad \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{v}$$

Pro diagonální matice je inverze jednoduchá:

$$\begin{bmatrix} a_{(1)} & & & 0 \\ & a_{(2)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{(n)} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} a_{(1)}^{-1} & & & 0 \\ & a_{(2)}^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_{(n)}^{-1} \end{bmatrix}$$

Ne každá matice má inverzi. Např. $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$, $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{smallmatrix}\right]$ nebo $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{smallmatrix}\right]$ inverzi nemají. Takové matice se nazývají *singulární*.

Matice, které mají inverzi, se nazývají *regulární*.

Determinant

$n = 1$ $\qquad \det \begin{bmatrix} a \end{bmatrix} = a \qquad\qquad + \begin{bmatrix} \circ \end{bmatrix}$

$n = 2$ $\qquad \det \begin{bmatrix} a & c \\ d & b \end{bmatrix} = a\,b - c\,d \qquad\qquad + \begin{bmatrix} \circ & \\ & \circ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} & \circ \\ \circ & \end{bmatrix}$

$n = 3$ $\qquad \det \begin{bmatrix} A^1_1 & A^1_2 & A^1_3 \\ A^2_1 & A^2_2 & A^2_3 \\ A^3_1 & A^3_2 & A^3_3 \end{bmatrix} = \begin{matrix} +A^1_1 A^2_2 A^3_3 + A^1_2 A^2_3 A^3_1 + A^1_3 A^2_1 A^3_2 \\ -A^1_1 A^2_3 A^3_2 - A^1_3 A^2_2 A^3_1 - A^1_2 A^2_1 A^3_3 \end{matrix}$

$$+ \begin{bmatrix} \circ & & \\ & \circ & \\ & & \circ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & \circ & \\ & & \circ \\ \circ & & \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} & & \circ \\ \circ & & \\ & \circ & \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \circ & & \\ & & \circ \\ & \circ & \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} & & \circ \\ & \circ & \\ \circ & & \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} & \circ & \\ \circ & & \\ & & \circ \end{bmatrix}$$

n $\qquad \det \boldsymbol{A} \;=\; \sum_{\text{pertmutace } \sigma} \operatorname{sign} \sigma \; A^1_{\sigma_1}\, A^2_{\sigma_2} \cdots A^n_{\sigma_n}$

Vlastnosti

- $\boldsymbol{D}$ diagonální $\qquad \Rightarrow \qquad \det \boldsymbol{D} =$ součin čísel na diagonále
- pokud je alespoň jeden sloupec či řádek matice $\boldsymbol{A}$ nulový $\qquad \Rightarrow \qquad \det \boldsymbol{A} = 0$
- prohození dvou řádků (sloupců) změní pouze znaménko determinantu
- $\det\big(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}\big) \;=\; \big(\det \boldsymbol{A}\big)\big(\det \boldsymbol{B}\big)$
- $\det\big(\boldsymbol{A}^{-1}\big) \;=\; \big(\det \boldsymbol{A}\big)^{-1} \qquad \Leftarrow \qquad \det\big(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1}\big) \;=\; \det \boldsymbol{I} \;=\; 1$
- $\boldsymbol{A}$ lze invertovat (je regulární) pokud $\qquad \det \boldsymbol{A} \neq 0$

Stopa

$$\operatorname{tr} \boldsymbol{A} \quad = \quad \sum_j A^j_j \quad = \quad \text{součet čísel na diagonále matice}$$

Cykličnost stopy

$$\operatorname{tr}\big(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \cdot \ \ldots \ \cdot \boldsymbol{Z}\big) \quad = \quad \operatorname{tr}\big(\boldsymbol{B} \cdot \ \ldots \ \cdot \boldsymbol{Z} \cdot \boldsymbol{A}\big)$$

Podobnost matic

Matice $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ nazýváme podobné, pokud existuje regulární matice $\boldsymbol{T}$ taková, že

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{T}^{-1}$$

Determinanty a stopy podobných matic jsou stejné

$$\det\big(\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{T}^{-1}\big) \quad = \quad \det A$$

$$\operatorname{tr}\big(\boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{T}^{-1}\big) \quad = \quad \operatorname{tr} A$$

Geometrie

Skalární součin $\vec{a},\,\vec{b} \quad \to \quad \big(\vec{a},\vec{b}\big) \;\equiv\; \vec{a}\cdot\vec{b} \;\in\; \mathbb{R}$

$\big(\vec{a},\vec{b}\big) \;=\; \big(\vec{b},\vec{a}\big)$	symetrie
$\big(\vec{a}+\vec{b},\vec{c}\big) = \big(\vec{a},\vec{c}\big) + \big(\vec{b},\vec{c}\big) \qquad \big(r\vec{a},\vec{b}\big) = r\big(\vec{a},\vec{b}\big)$	linearita
$\big(\vec{a},\vec{a}\big) > 0 \quad \text{pro } \vec{a} \neq \vec{0}$	positivní definitnost
$\forall\vec{x} \quad \big(\vec{a},\vec{x}\big) = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = 0$	nedegenerovanost
$\lvert\vec{a}\rvert \;=\; \sqrt{\big(\vec{a},\vec{a}\big)}$	délka vektoru
$\big(\vec{a},\vec{b}\big) \;=\; \lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\,\cos\sphericalangle[\vec{a},\vec{b}]$	úhel mezi vektory

Vektorový součin $\vec{a},\,\vec{b} \quad \to \quad \vec{v} \;=\; \vec{a}\times\vec{b}$

$\vec{v}\perp\vec{a} \qquad \vec{v}\perp\vec{b} \qquad \lvert\vec{v}\rvert \;=\; \lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\sin\sphericalangle[\vec{a},\vec{b}]$	definiční vlastnosti
$\vec{a}\times\vec{b} \;=\; -\vec{b}\times\vec{a}$	antisymetrie
$\big(\vec{a}+\vec{b}\big)\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c} \qquad \big(r\vec{a}\big)\times\vec{b} = r\big(\vec{a}\times\vec{b}\big)$	linearita
$\big(\vec{a}\times\vec{b}\big)\times\vec{c} \;\neq\; \vec{a}\times\big(\vec{b}\times\vec{c}\big)$	není asociativní
$\big(\vec{a}\times\vec{b}\big)\times\vec{c} \;=\; \vec{b}\,\big(\vec{a},\vec{c}\big) - \vec{c}\,\big(\vec{a},\vec{b}\big)$	“bac – cab”

Smíšený součin $\big(\vec{a}\times\vec{b}\big)\cdot\vec{c} \;=\; \big(\vec{b}\times\vec{c}\big)\cdot\vec{a} \;=\; \big(\vec{c}\times\vec{a}\big)\cdot\vec{b}$

$=$ orientovaný objem rovnoběžnostěnu napnutého na $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$

Souřadnice vektorů

každý vektor lze vyjádřit vůči bázi

báze vektorů $=$ lineárně nezávislé vektory $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$

$$\vec{a} = a^1\,\vec{e}_1 + a^2\,\vec{e}_2 + a^3\,\vec{e}_3$$

$$\text{vektor } \vec{a} \quad \leftrightarrow \quad \text{souřadnice } \begin{bmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{bmatrix}$$

ortonormální báze

$$|\vec{e}_j| \;=\; 1 \qquad \left(\vec{e}_i, \vec{e}_j\right) \;=\; 0 \qquad \text{pro } i \neq j$$

Skalární součin v ortonormálních souřadnicích

$$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) \;\equiv\; a^1\,b^1 + a^2\,b^2 + a^3\,b^3$$

Vektorový součin v ortonormálních souřadnicích

$$\vec{v} \;=\; \vec{a} \times \vec{b} \qquad \begin{aligned} v^1 &= a^2\,b^3 - a^3\,b^2 \\ v^2 &= a^3\,b^1 - a^1\,b^3 \\ v^3 &= a^1\,b^2 - a^2\,b^1 \end{aligned}$$

Smíšený součin ortonormálních souřadnicích

$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} \;=\; a^1\,b^2\,c^3 + a^2\,b^3\,c^1 + a^3\,b^1\,c^2 - a^1\,b^3\,c^2 - a^3\,b^2\,c^1 - a^2\,b^1\,c^3 \;=\; \det \begin{bmatrix} a^1 & b^1 & c^1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{bmatrix}$$

Souřadnice bodů

Lineární souřadnice

vztažná soustava: počátek P a souřadnicové osy dané lineárně nezávislými směry $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$

$$A \;=\; P \;+\; \vec{r} \;=\; P \;+\; x^1\,\vec{e}_1 + x^2\,\vec{e}_2 + x^3\,\vec{e}_3$$

$\vec{r}$ průvodič bodu A $\qquad \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}$ (lineární) souřadnice bodu A

místo x^1, x^2, x^3 často používáme označení x, y, z

Kartézské souřadnice

osy $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ tvoří ortonormální bázi (jsou na sebe kolmé a mají stejnou jednotku)

vzdálenost bodů v kartézských souřadnicích:

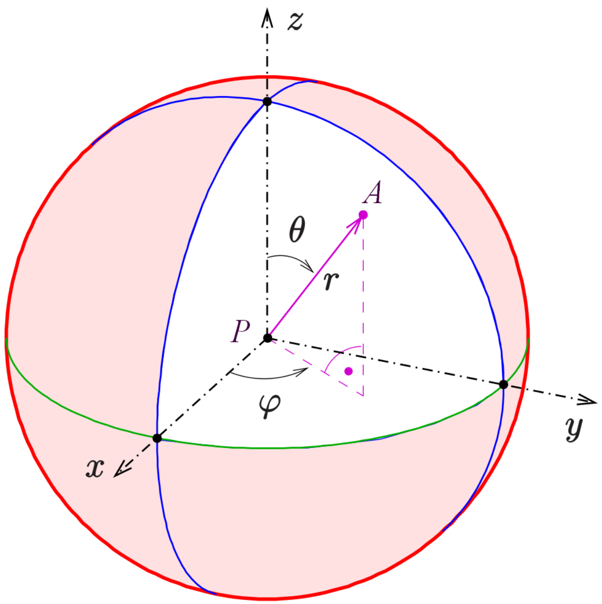
$$d(A,B) \;=\; |A-B| \;=\; \sqrt{\left(\Delta x^1\right)^2 + \left(\Delta x^2\right)^2 + \left(\Delta x^3\right)^2} \;=\; \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

kde $\qquad \Delta x^j = x^j(B) - x^j(A)$

Rovina E^2

Polární souřadnice ρ, φ

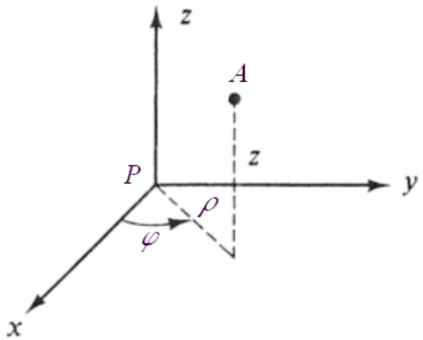
$$x = \rho\cos\varphi \qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$y = \rho\sin\varphi \qquad \tan\varphi = \frac{y}{x}$$



Prostor E^3

Cylindrické souřadnice ρ, φ, z

$$x = \rho\cos\varphi \qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$y = \rho\sin\varphi \qquad \tan\varphi = \frac{y}{x}$$
$$z = z \qquad z = z$$



Sférické souřadnice r, θ, φ

$$x = r\sin\theta\,\cos\varphi \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$
$$y = r\sin\theta\,\sin\varphi \qquad \tan\theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} = \frac{\rho}{z}$$
$$z = r\cos\theta \qquad \tan\varphi = \frac{y}{x}$$

Derivování v prostoru

Funkce více proměnných

$$f\big(x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_p\big)$$

parciální derivace podle k-té proměnné

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}\big(x_1,\, \ldots,\, x_k,\, \ldots,\, x_p\big) \quad = \quad \frac{d}{dx_k} f\big(\underbrace{x_1,\, \ldots,\, x_{k-1}}_{\text{konstantní}},\, x_k,\, \underbrace{x_{k+1},\, \ldots,\, x_p}_{\text{konstantní}}\big)$$

symetrie druhých parciálních derivací

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k\, \partial x_l} \quad = \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_l\, \partial x_k}$$

derivování složené funkce

$$F(t) = f\big(h_1(t),\, h_2(t),\, \ldots,\, h_p(t)\big)$$

kde $f\big(x_1,\, \ldots,\, x_p\big)$ je funkce více proměnných a $h_1(t),\, \ldots,\, h_p(t)$ jsou funkce jedné proměnné

$$\frac{dF}{dt} \quad = \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}\big(h_1,\, h_2,\, \ldots,\, h_p\big)\, \frac{dh_1}{dt} \quad + \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}\big(h_1,\, h_2,\, \ldots,\, h_p\big)\, \frac{dh_2}{dt} \quad + \quad \ldots \quad + \quad \frac{\partial f}{\partial x_p}\big(h_1,\, h_2,\, \ldots,\, h_p\big)\, \frac{dh_p}{dt}$$