V1

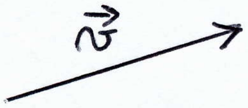
17.9.2019

Vektory a jejich součiny

fyzikální veličiny
- skaláry : určeny jedinou hodnotou ($m, T, p, \ldots$)
- vektory : hodnotou a směrem ($\vec{v}, \vec{a}, \vec{F}, \vec{E}, \ldots$)
- tenzory : více složek (deformace, $g_{\mu\nu}, F_{\mu\nu}$)

$\boxed{\text{vektory ze střední školy}}$: znáte ve 2 verzích

- **geometrické vektory** : vektor $\vec{v}$ je šipka (orientovaná úsečka)



má
- velikost (délka)
- směr (včetně orientace)

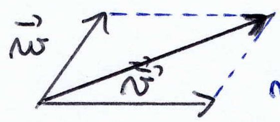
2 operace
- násobení reálným číslem c : $c\vec{v}$ je delší/kratší šipka ve stejném směru

  $c\vec{v}$ pro $0<c<1$

  spec. pro $c=0$: nulový vektor $\vec{0}$

- sčítání dvou vektorů : $\vec{v}+\vec{w}$ = vektor $\vec{u}$

  úhlopříčka rovnoběžníku



  např. skládání 2 sil

- **algebraické vektory** : uspořádané trojice čísel $\in \mathbb{R}$

  (dvojice, n-tice)

$$(v_1, v_2, v_3)$$

2 operace

$$c\vec{v} \equiv (cv_1, cv_2, cv_3)$$

spec. $\vec{0} \equiv (0,0,0)$

$$\vec{v}+\vec{w} \equiv (v_1+w_1, v_2+w_2, v_3+w_3)$$

z hlediska univerzitní matematiky jsou toto jen 2 konkrétní realizace obecné abstraktní struktury :

$\boxed{\text{vektor je prvek abstraktního vektorového prostoru}}$

Uveďme jeho matem. definici :

V2

vektorový prostor V je množina se 2 operacemi:

1. součet dvou prvků $\vec{v}+\vec{w}=\vec{u}\in V \quad \forall \vec{v},\vec{w}\in V$
2. číselný násobek prvku $c\vec{v}=\vec{w}\in V \quad \forall \vec{v}\in V, \forall c\in\mathbb{R}$

přičemž platí následující vlastnosti (jejich 8)

a) $\vec{v}+\vec{w}=\vec{w}+\vec{v}$ komutativnost

b) $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$ asociativnost

c) existuje právě jeden nulový prvek $\vec{0}\in V$: $\vec{v}+\vec{0}=\vec{v}$

d) existuje právě jeden opačný vektor $-\vec{v}\in V$: $\vec{v}+(-\vec{v})=\vec{0}$

e) $c(d\vec{v})=(cd)\vec{v}$

f) $1\vec{v}=\vec{v}$

g) $(c+d)\vec{v}=c\vec{v}+d\vec{v}$

h) $c(\vec{v}+\vec{w})=c\vec{v}+c\vec{w}$

! typická matematická axiomatická definice ... splňují jak ↑, tak $(v_1, v_2, ...)$

důležité koncepty:

- **lineární kombinace vektorů** $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_k$

je vektor $\boxed{\vec{v}\equiv c_1\vec{v}_1+c_2\vec{v}_2+\dots c_k\vec{v}_k\equiv\sum_{i=1}^{k}c_i\vec{v}_i} = c_i\vec{v}_i$

(neboť $\vec{v}\in V$)

Einsteinovo sumační pravidlo

- **báze vektorového prostoru V** je množina vektorů $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n\}$ s nejmenším možným n taková, že jejich lineární kombinací lze získat každý vektor $\vec{v}\in V$

- **toto unikátní n udává dimenzi prostoru**: $\boxed{n=\dim V}$

vezmeme-li méně vektorů, nedostaneme všechny $\vec{v}\in V$

Příklad $\begin{cases}\vec{e}_1=(1,0,0) \\ \vec{e}_2=(0,1,0)\end{cases}$ dává lineární kombinací $\vec{v}=c_1\vec{e}_1+c_2\vec{e}_2$ jenom vektory $\vec{v}=(c_1,c_2,0)$, NIKOLI např. $\vec{v}=(0,0,1)$

vezmeme-li více vektorů, budou přebytečné

- báze není jednoznačná, ale všechny báze daného V mají stejně vektorů [Steinitzova věta]

(V3) zvolme bázi $\{\vec e_1, \vec e_2, \dots, \vec e_n\}$

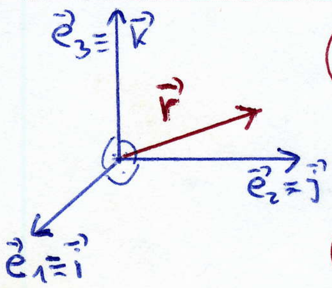
každý vektor $\vec v$ lze vyjádřit jako jejich lineární kombinaci:

$$\boxed{\vec v = v_1 \vec e_1 + v_2 \vec e_2 + \dots + v_n \vec e_n} = \sum_{i=1}^{n} v_i \vec e_i$$

uspořádaná n-tice čísel $\boxed{(v_1, v_2, \dots, v_n)}$ jsou $\boxed{\text{složky vektoru } \vec v}$ vůči dané bázi $\{\vec e_1, \vec e_2, \dots, \vec e_n\}$

tím je objasněn vztah mezi abstraktními (geometrickými) a algebraickými vektory

Příklad: standardní volba kartézské báze v mechanice : $\dim V = 3$



$\{\vec e_1, \vec e_2, \vec e_3\} \equiv \{\vec i, \vec j, \vec k\}$ navzájem kolmé a jednotkové

polohový vektor $\vec r$ je dán $\vec r = x\vec i + y\vec j + z\vec k$

složky

složky $\vec r$ jsou (x, y, z)

zatímco
$$\left\{\begin{array}{lll} \vec i \text{ má složky} & (1,0,0) & \text{protože } \vec i = 1\vec i + 0\vec j + 0\vec k \\ \vec j \quad -\shortparallel- & (0,1,0) & -\shortparallel- \quad \vec j = 0\vec i + 1\vec j + 0\vec k \\ \vec k \quad -\shortparallel- & (0,0,1) & -\shortparallel- \quad \vec k = 0\vec i + 0\vec j + 1\vec k \end{array}\right.$$

? co znamená, že vektory báze jsou kolmé a jednotkové ?

z axiomů V neplyne : nutno dodefinovat :

dodatečná bilineární operace $V \times V \to \mathbb{R}$

$$\boxed{\text{skalární součin 2 vektorů}} \quad \boxed{\vec v \bullet \vec w = \text{číslo}}$$

operace je
- symetrická $\quad \vec v \bullet \vec w = \vec w \bullet \vec v$
- pozitivně definit. $\quad \vec v \bullet \vec v \geq 0$, $\quad \vec v \bullet \vec v = 0 \Leftrightarrow \vec v = \vec 0$

$\forall \vec v, \vec w \in V$

pak lze přirozeně definovat

- velikost vektoru $\vec v$: $\quad v = |\vec v| \equiv \sqrt{\vec v \bullet \vec v}$
- jednotkový vektor $\vec v$: $\quad v = 1$ neboli $\vec v \bullet \vec v = 1$
- kolmost $\vec v$ na $\vec w$: $\quad \vec v \bullet \vec w = 0$
- ortonormální báze $\vec e_1, \vec e_2, \dots$ $\quad \boxed{\vec e_i \bullet \vec e_j = \delta_{ij}} \begin{cases} = 0 & \text{pro } i \neq j \\ = 1 & \text{pro } i = j \end{cases}$ Kronecker

(V4) **Příklad:**

Kartézská báze $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ je ortonormální protože platí

$\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1$ tedy jsou jednotkové

$\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{i}\cdot\vec{k} = \vec{j}\cdot\vec{k} = 0$ tedy jsou kolmé

Skalární součin $\vec{v}$ a $\vec{w}$ se díky tomu počítá dle známého vzorce

$$\boxed{\vec{v}\cdot\vec{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3}$$

Důkaz: složky vektorů v_i a w_i jsou $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$

takže $\vec{w} = w_1\vec{i} + w_2\vec{j} + w_3\vec{k}$

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = v_1 w_1 \underbrace{\vec{i}\cdot\vec{i}}_{=1} + v_1 w_2 \underbrace{\vec{i}\cdot\vec{j}}_{=0} + \dots \quad 3\times 3 \ 9 \text{ členů}$$

atd

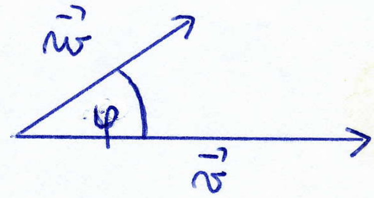
nenulové jsou pouze

$$= v_1 w_1 \vec{i}\cdot\vec{i} + v_2 w_2 \vec{j}\cdot\vec{j} + v_3 w_3 \vec{k}\cdot\vec{k}$$

Q.E.D.

velikost $\vec{v}$ je $\boxed{v = |\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$

a také platí $\boxed{\vec{v}\cdot\vec{w} = v w \cos\varphi}$



kolmé: $\vec{v}\cdot\vec{w} = 0 \Leftrightarrow \varphi = \pm\frac{\pi}{2}$

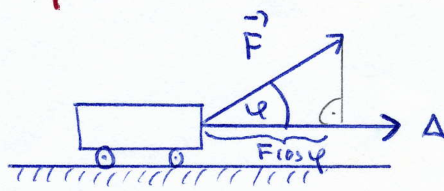
míří stejně: $\vec{v}\cdot\vec{w} = vw \Leftrightarrow \varphi = 0$

Důležitá fyzikální aplikace:

práce vykonaná silou při přemístění

$$\boxed{\underbrace{W}_{J} = \underbrace{\vec{F}}_{N}\cdot\underbrace{\Delta\vec{r}}_{m}} = F\,\Delta r\cos\varphi = \underbrace{(F\cos\varphi)}\,\Delta r$$

! průmět $\vec{F}$ do směru dráhy $\Delta\vec{r}$



složka síly $\vec{F}$ kolmá na dráhu nekoná žádnou práci! $(\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\varphi = 0)$

například magnetická síla na nabitou částici $\vec{F} = q\,\vec{v}\times\vec{B}$

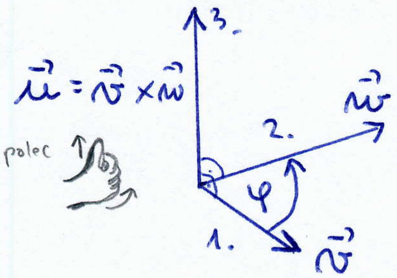
co je toto ?

V5 •
Vektorový součin 2 vektorů ve 3D $\vec{v} \times \vec{w} =$ vektor $\vec{u}$

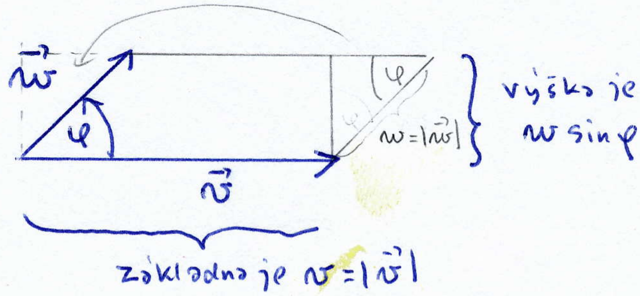
definice • $\vec{u}$ je kolmý na $\vec{v}$ i $\vec{w}$ tedy $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$, $\vec{u}\cdot\vec{w} = 0$

• míří dle „pravidla pravé ruky"

• má velikost $\boxed{u = v\,w \sin\varphi}$



což je plocha rovnoběžníku



Platí:

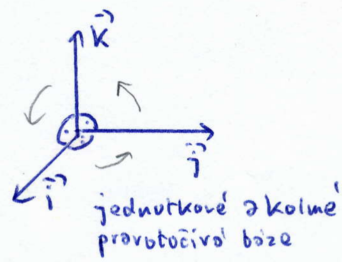
• $\boxed{\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}}$!!! antisymetrická: závisí na pořadí !!!

• $\vec{v} \times \vec{v} = 0$ protože $\varphi = 0$ (plocha je nulová)

• $(c\vec{v} + d\vec{w}) \times \vec{u} = c\,\vec{v} \times \vec{u} + d\,\vec{w} \times \vec{u}$ linearita

• pro kartézskou bázi $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ platí

$$\boxed{\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \qquad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \qquad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}}$$



• díky tomu lze $\times$ počítat ve složkách:

$w_i = \varepsilon_{ijk} v_j w_k$
Levi-Civita

1. cz − opačné 2. cz − opačné 3. cz − opačné

$$\boxed{\vec{u} = \vec{v} \times \vec{w} \equiv (\underbrace{v_2 w_3 - v_3 w_2}_{u_1},\ \underbrace{v_3 w_1 - v_1 w_3}_{u_2},\ \underbrace{v_1 w_2 - v_2 w_1}_{u_3})}$$

Důkaz:

$\vec{v} \times \vec{w} = (v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}) \times (w_1\vec{i} + w_2\vec{j} + w_3\vec{k}) =_{\text{jen}} v_1 w_2\, \vec{i} \times \vec{j} + v_1 w_3\, \vec{i} \times \vec{k} + v_2 w_1\, \vec{j} \times \vec{i}$
$+ v_2 w_3\, \vec{j} \times \vec{k} + v_3 w_1\, \vec{k} \times \vec{i} + v_3 w_2\, \vec{k} \times \vec{j}$

$= v_1 w_2 \vec{k} - v_1 w_3 \vec{j} - v_2 w_1 \vec{k} + v_2 w_3 \vec{i} + v_3 w_1 \vec{j} - v_3 w_2 \vec{i}$

• smíšený součin $\boxed{\underbrace{\vec{w}\cdot(\vec{v} \times \vec{w})}_{\text{číslo}}}$ je objem rovnoběžnostěnu $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$
lze cyklit pořadí!

• dvojnásobný součin (důkaz ve složkách) $\underbrace{\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})}_{\text{vektor}} = \underbrace{(\vec{u}\cdot\vec{w})}_{\text{číslo}}\vec{v} - \underbrace{(\vec{u}\cdot\vec{v})}_{\text{číslo}}\vec{w}$

• fyzikální aplikace
$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ moment síly
$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ moment hybnosti
$\vec{F} = q\,\vec{v} \times \vec{B}$ síla v magnet. poli