Úloha 1: Neortogonální báze

Na přednášce jsme si ukázali, že množina vektorů $\{|\phi_i\rangle\}_{i=1}^n$ je lineárně nezávislá právě když matice s prvky $S_{ij} = \langle\phi_i|\phi_j\rangle$ (Gramova matice) má nenulový determinant. Pro takovouto neortogonální, ale úplnou množinu vektorů:

- Najděte vyjádření koeficientů c_i rozvoje $|\psi\rangle = \sum_i c_i|\phi_i\rangle$ vektoru ψ pomocí skalárních součinů $\langle\phi_i|\psi\rangle$ (3body).
- Jaké je zobecnění relace úplnosti $I = \sum_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i|$, která platila pro ortonormální bazi (2body)?
- Vyjádřete skalární součin $\langle\psi|\tilde{\psi}\rangle$ pomocí čísel $\langle\phi_i|\psi\rangle$ a $\langle\phi_i|\tilde{\psi}\rangle$ (2 body).
- Vyjádřete působení operátoru $|\tilde{\psi}\rangle = H|\psi\rangle$, tj. najděte vztah mezi $\langle\phi_i|\tilde{\psi}\rangle$ a $\langle\phi_i|\psi\rangle$, vyjádřený pomocí $h_{ij} = \langle\phi_i|H|\phi_j\rangle$ (3 body).

Poznámka:

Takto jsem zadal úlohu na cvičení. V původní webové verzi jsem udělal chybu a poslední dva body zněly

- Vyjádřete skalární součin $\langle\psi|\tilde{\psi}\rangle$ pomocí rozvojových koeficientů c_i, $\tilde{c}_i$ (2 body).
- Vyjádřete působení operátoru $|\tilde{\psi}\rangle = H|\psi\rangle$, tj. najděte vztah mezi $\tilde{c}_i$ a c_i, vyjádřený pomocí $h_{ij} = \langle\phi_i|H|\phi_j\rangle$ (3 body).

Nakonec jsem uznával řešení podle obou zadání.