Úloha 2: delta-funkční pontenciály

Řešte stacionární Schrödingerovu rovnici

$$\psi''(x) + [E - V(x)]\psi(x) = 0 \tag{1}$$

s potenciálem daným součtem několika Diracových delta-funkcí

$$V(x) = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \delta(x - x_n). \tag{2}$$

Postupně proveďte následující kroky:

- Obecné řešení v bodech x mimo $x = x_n$ je dáno výrazem

  $$\psi^{(i)} = A_+^{(i)} e^{\kappa x} + A_-^{(i)} e^{-\kappa x}.$$

  Najděte podmínku pro napojování dvou řešení $\psi^{(n-1)}(x)$ a $\psi^{(n)}(x)$ v bodě $x = x_n$. Podmínku vyjádřete ve tvaru

  $$\begin{pmatrix} A_+^{(n-1)}, \\ A_-^{(n-1)} \end{pmatrix} = P_n \begin{pmatrix} A_+^{(n)}, \\ A_-^{(n)} \end{pmatrix},$$

  kde P_n je matice 2×2. Určete matici přenosu P_n (3body).

- Podmínky aplikujte na potenciál

  $$V(x) = \delta(x - 1) - \delta(x),$$

  pro záporné energie. Nalezněte rovnici, kterou musí splňovat κ, aby energie $E = -\kappa^2$ byla energií vázaného stavu (3body).

- Řešte Schrödingerovu rovnici pro stejný potenciál, ale pro kladnou energii E, tj. $\kappa = ik$, kde k je kladné reálné číslo. Nalezněte koeficient průchodu T jako funkci k (3body).

- Uvažujme prodloužení vzorce pro $T(k)$ do komplexních hodnot k. Jaká je podmínka pro to, aby funkce $T(k)$ měla v daném k pól? Porovnejte tuto podmínku s podmínkou pro vázaný stav (1bod).