

Úloha 1: Kvantové tečky.

Termín odevzdání: 22. října

Kvantovou tečku si můžete představit jako malou krabičku (např. kousek kovu - viz obrázek vlevo dole), do které lze umístit částici (např. elektron) tak, že se tam nemůže hýbat. Když dáme 4 takové tečky vedle sebe (viz schéma vpravo dole), může částice přeskakovat mezi tečkami tunelováním. Stavový prostor takového systému je $\mathcal{H} = \mathbb{C}^4 = \text{span}\{|A\rangle, |B\rangle, |C\rangle, |D\rangle\}$, tj. lineární obal vektorů $|a\rangle$, označujících stav, kdy částice je v tečce $a = A, B, C, D$. Definujeme operátory souřadnic a prohazování $A \leftrightarrow C, B \leftrightarrow D$:

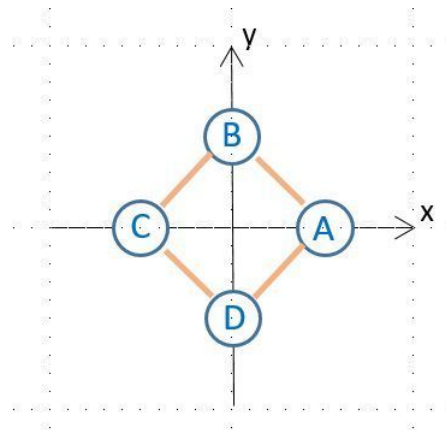
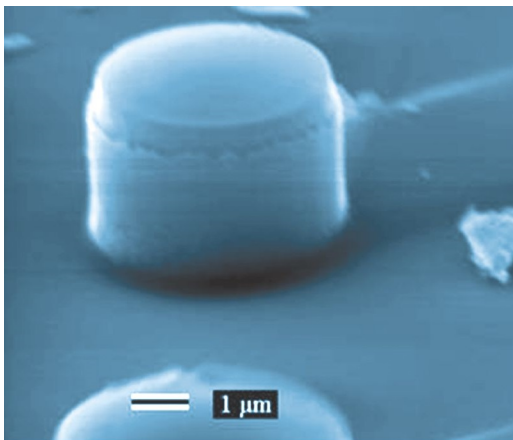
$$\begin{aligned}\hat{X} &= |A\rangle\langle A| - |C\rangle\langle C|, & \hat{Y} &= |B\rangle\langle B| - |D\rangle\langle D|, \\ \hat{P}_X &= |A\rangle\langle C| + |C\rangle\langle A|, & \hat{P}_Y &= |B\rangle\langle D| + |D\rangle\langle B|.\end{aligned}$$

Dále budeme uvažovat operátor zapsaný v bázi $\{|A\rangle, |B\rangle, |C\rangle, |D\rangle\}$ jako

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \beta \\ \beta & \alpha & \beta & \gamma \\ \gamma & \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \gamma & \beta & \alpha \end{pmatrix},$$

kde α, β, γ jsou reálné konstanty (jde o nejobecnější operátor respektující symetrii uspořádání teček na schématu vpravo dole).

1. Najděte společné vlastní vektory operátorů \hat{P}_X, \hat{P}_Y a vlastní čísla p_x, p_y . (4 body)
2. Napište matici operátoru \hat{H} v této bázi a najděte její vlastní čísla a vlastní vektory. (4 body)
3. Předpokládejme, že začneme se systémem v neznámém stavu $|\psi_0\rangle$ a připravíme ho do stavu $|\psi\rangle$ tím, že provedeme postupně měření \hat{X} a \hat{Y} , přičemž naměříme hodnoty 0 a 1. Následně změříme veličinu \hat{H} . Jaké hodnoty a s jakou pravděpodobností můžeme najít? (2body)



Obrázek kvantové tečky z elektronového mikroskopu (vlevo, *wikimedia*) a schéma symetrického uspořádání 4 teček v naší úloze (vpravo).