

Úloha 1: Kvantové tečky.

Termín odevzdání: 20. října

Kvantovou tečku si můžete představit jako malou krabičku (např. kousek kovu - viz obrázek vlevo dole), do které lze umístit částici (např. elektron) tak, že se tam nemůže hýbat. Když dáme 3 takové tečky vedle sebe (viz schéma vpravo dole), může částice přeskakovat mezi tečkami tunelováním. Stavový prostor takového systému je $\mathcal{H} = \mathbb{C}^3 = \text{span}\{|A\rangle, |B\rangle, |C\rangle\}$, tj. lineární obal vektorů $|a\rangle$, označujících stav, kdy částice je v tečce $a = A, B, C$. Definujeme operátory souřadnic (porovnejte s obrázkem):

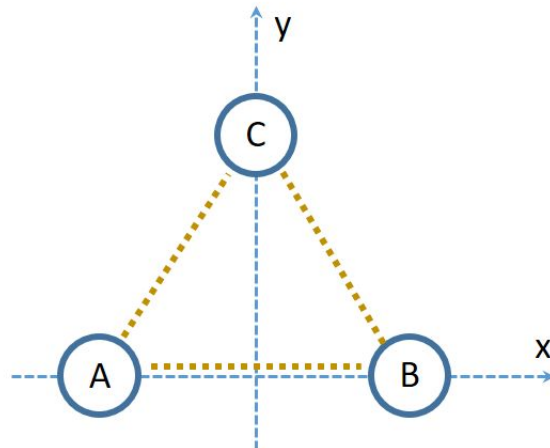
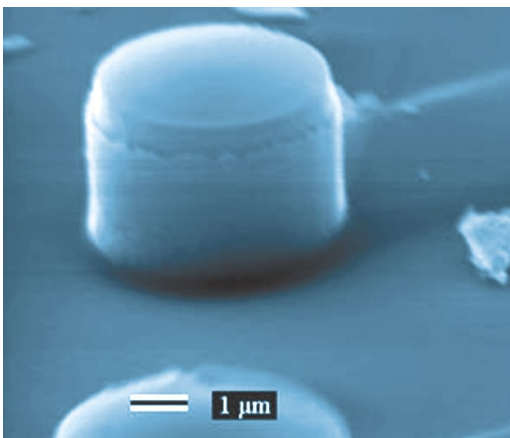
$$\hat{X} = a\frac{1}{2}\{|B\rangle\langle B| - |A\rangle\langle A|\}, \quad \hat{Y} = a\frac{\sqrt{3}}{2}|C\rangle\langle C|,$$

kde $a > 0$ je konstanta s rozměrem délky. Dále budeme uvažovat operátory energie a toku zapsané v bázi $\{|A\rangle, |B\rangle, |C\rangle\}$ jako

$$\hat{H} = -\hbar\omega \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{J} = i\omega \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

kde $\omega > 0$ je konstanta s rozměrem frekvence.

1. Napište operátory \hat{X} , \hat{Y} v maticovém tvaru jako \hat{H} , \hat{J} a \hat{H} , \hat{J} pomocí vnějšího součinu jako \hat{X} , \hat{Y} výše. (2 body)
2. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory operátoru \hat{H} a spočtěte jeho exponenciálu $\exp(-it\hat{H}/\hbar)$ (t je reálné číslo) a absolutní hodnotu $|\hat{H}|$. Zamyslete se, jak se projeví symetrie systému. (4 body)
3. Systém je připraven ve stavu $|\psi_1\rangle = |A\rangle$. S jakou pravděpodobností naměříme kladnou hodnotu energie \hat{H} a jaký bude stav $|\psi_2\rangle$ po tomto měření? Jaká bude střední hodnota souřadnice \hat{X} ve stavu $|\psi_2\rangle$? Jaké hodnoty souřadnice \hat{Y} a s jakou pravděpodobností můžeme naměřit ve stavu $|\psi_2\rangle$? (4 body)



Obrázek kvantové tečky z elektronového mikroskopu (vlevo, *wikimedia*) a schéma symetrického uspořádání 3 teček v naší úloze (vpravo).