

### Úloha 3: Moment hybnosti v dvourozměrném oscilátoru

Termín odevzdání: 24. listopadu

Izotropní dvourozměrný harmonický oscilátor je užitečný model, například pro popis "bending" vibrační molekuly CO<sub>2</sub>. Uvažujme takový oscilátor s hamiltoniánem

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(\hat{x}^2 + \hat{y}^2) = \hat{H}_x + \hat{H}_y.$$

Rozmyslete si, že stacionární stavy takového oscilátoru vlastně znáte, protože operátory  $\hat{H}_x = \hat{h} \otimes \hat{I}$  a  $\hat{H}_y = \hat{I} \otimes \hat{h}$  jsou triviálním rozšířením hamiltoniánu  $\hat{h}$  jednorozměrného oscilátoru, napsaného v proměnné  $x$  nebo  $y$ , tj. stacionární stavy se dají napsat v separovaném tvaru

$$|mn\rangle = \frac{(\hat{a}_x^\dagger)^m (\hat{a}_y^\dagger)^n}{\sqrt{m!} \sqrt{n!}} |00\rangle = \frac{(\hat{a}_x^\dagger)^m}{\sqrt{m!}} |0\rangle \otimes \frac{(\hat{a}_y^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle,$$

kde jsme zavedli operátor  $\hat{a}_x^\dagger = \hat{a}^\dagger \otimes \hat{I}$  excitace ve směru  $x$ , a operátor  $\hat{a}_y^\dagger = \hat{I} \otimes \hat{a}^\dagger$  excitace ve směru  $y$ . Vlnová funkce takového stavu pak je v souřadnicové reprezentaci daná vzorcem  $\psi_{mn}(x, y) = \phi_m(x)\phi_n(y)$  pomocí vlastních funkcí  $\phi_n$  jednorozměrného oscilátoru (viz tabulka níže).

1. Ukažte, že operátor momentu hybnosti  $\hat{L} = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x$  je zachovávací se veličina. (2 body)
2. Ukažte, že operátory  $\hat{H}$  i  $\hat{L}$  lze napsat pomocí operátorů počtu cirkulárních kvant  $\hat{N}_+ = \hat{a}_+^\dagger \hat{a}_+$  a  $\hat{N}_- = \hat{a}_-^\dagger \hat{a}_-$ , kde jsme zavedli kreační operátory  $\hat{a}_\pm^\dagger = (\hat{a}_x^\dagger \pm i\hat{a}_y^\dagger)/\sqrt{2}$ . (3 body)
3. Operátory  $\hat{N}_+$  a  $\hat{N}_-$  komutují a jejich společné vlastní stavy lze najít působením operátorů  $\hat{a}_\pm^\dagger$  na vektor základního stavu  $|00\rangle$ . Najděte vztah mezi vlastními čísly  $n_+$  a  $n_-$  těchto operátorů a vlastními čísly operátorů  $\hat{H}$  a  $\hat{L}$ . Najděte vlnové funkce těchto společných vlastních stavů pro tři nejnižší energie  $\hbar\omega$ ,  $2\hbar\omega$ ,  $3\hbar\omega$ . (3body)
4. Jaké hodnoty energie a momentu hybnosti a s jakou pravděpodobností, můžeme naměřit ve stavu popsáném vlnovou funkcí (2body)

$$\psi(x, y) = xye^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)/x_0^2}.$$

*Nápověda:* Vlnové funkce  $\phi_n(x) = \langle x|n\rangle$  tří nejnižších stavů jednorozměrného harmonického oscilátoru jsou

$$\phi_0(x) = Ae^{-\frac{1}{2}q^2}, \quad \phi_1(x) = A\sqrt{2}qe^{-\frac{1}{2}q^2}, \quad \phi_2(x) = \frac{A}{\sqrt{2}}(2q^2 - 1)e^{-\frac{1}{2}q^2},$$

kde  $A^{-2} = x_0\sqrt{\pi}$  je normalizační konstanta  $q = x/x_0$  a  $x_0^2 = \frac{\hbar}{m\omega}$ .