

Úloha 5: Kvantový rotor se spinem 1/2

Termín odevzdání: 20. prosinec

Pohyb kvantové částice vázaný na sféru o poloměru 1 je popsán kvadraticky integrovatelnou vlnovou funkcí $\psi(\theta, \varphi)$. Moment hybnosti této částice je pak dán operátorem orbitálního momentu hybnosti $\vec{L} = (\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z)$ jenž jsme studovali na přednášce a s jehož pomocí jsme odvodili sférické harmoniky $Y_{lm}(\theta, \varphi)$. Uvažujme navíc, že částice má spin 1/2.

1. Najděte všechny stavy tohoto systému s celkovým momentem hybnosti $\hat{J} = \hat{L} + \hat{S}$ rovným 1/2, tj. vlastní hodnota operátoru \hat{J}^2 je $\frac{3}{4}\hbar^2$. (5 bodů)
2. Vezměme lineární obal všech stavů z předchozí úlohy. Jaké nejmenší vlastní hodnoty v něm může nabývat operátor $\vec{J} \cdot \vec{S}$ (2 body)
3. Z množiny všech stavů na nichž je tento skalární součin roven nejmenší hodnotě vyberte ten s nejmenší střední hodnotou y-složky spinu $\langle s_y \rangle$ a spočítejte hustotu pravděpodobnosti výskytu částice v daném místě na sféře $\rho(\theta, \phi)$ pro tento stav. (3 body)