

Cvičení 3: Formalismus QM - direktní součin prostorů.

Motivace: Vyzkoušet si postup aplikace základních axiomů kvantové teorie na příkladech se stavovým prostorem daným direktním součinem.

Úloha 1

Mějme dvě částice se spinem $1/2$. Na stavovém prostoru daném direktním součinem dvou prostorů \mathbb{C}^2 jsou definovány operátor z-tové složky celkového spinu

$$\hat{S}_z = \hat{s}_z^{(1)} \otimes \hat{I} + \hat{I} \otimes \hat{s}_z^{(2)}$$

a permutační operátor

$$\hat{P}|s_1s_2\rangle = |s_2s_1\rangle,$$

který prohazuje částice ($|s_1s_2\rangle = |s_1\rangle \otimes |s_2\rangle$). Ukažte, že tyto dva operátory komutují. Najděte společnou bázi z vlastních vektorů. Jedná se o úplnou množinu komutujících operátorů na zadaném prostoru?

Nápověda: Operátory můžete reprezentovat jako matice 4×4 ve vhodné bázi a nebo stačí vyšetřovat jak působí na vektory báze.

Úloha 2

Mějme opět dvě částice se spinem $1/2$, tentokrát připravené ve stavu

$$|\psi\rangle = |z : +\rangle \otimes |x : +\rangle.$$

daném jako direktní součin vlastního vektoru projekce spinu do osy z jedné částice a vlastního stavu projekce spinu do osy x druhé částice.

a) Najděte pravděpodobnost naměření různých hodnot s_z druhé částice v tomto stavu a stav systému po měření.

b) Jak se změní odpověď na otázku a) pokud nejprve provedeme měření s_x první částice?

Nápověda: Opět můžete pracovat ve vhodné bázi se 4 prvkovými vektory. Rychlejší asi je držet si vektory i operátory ve tvaru tenzorového součinu a uvědomit si, že měření na podsystému ovlivní jen jednu část faktorizovaného vektoru.

Úloha 3

Stejná úloha jako předchozí, ale pro provázaný (entanglovaný) stav

$$|\psi\rangle = |z : +\rangle \otimes |x : +\rangle + |x : +\rangle \otimes |z : +\rangle.$$

Nezapomeňte stav správně normalizovat! Ukažte, že stav nelze faktorizovat jako jediný direktní součin.