Úvod

V tomto dokumentu naleznete zadání a vzorové řešení zápočtové písemky z přednášky "Kvantová mechanika I" za ZS 2022/23. Úlohy byly voleny tak, že by je měl být schopen beze zbytku vyřešit každý, kdo absolvoval přednášku a cvičení pokud by měl dost času, ale k vyřešení úloh v časovém limitu (90min) je potřeba ještě trochu tvůrčí invence a porozumění různým souvislostem v látce přednášky.

Na získání zápočtu by vám mělo stačit získat pár bodů, ke kompenzaci případných bodových ztrát z domácích úloh. Snažil jsem se úlohy volit tak, aby každý kdo se věnoval hlouběji přípravě a spočítal si předem pár úloh, byl v časovém limitu schopen získat alespoň polovinu bodů, což (spolu s domácími úlohami) stačí na odpuštění řešení dalších úloh při zkoušce. Nakonec jsem trochu snížil tento limit na 24 bodů, ale odpustil jsem případné drobné bodové ztráty z domácích úkolů.

V následujícím textu naleznete vzorové řešení. Doporučuji si je pečlivě přečíst pro přípravu ke zkoušce.

Poznámka: Řešení pro každou úlohu by se mělo vejít na jednu stránku (včetně zadání). Na první stránce je vždy takové vzorové řešení. Případná další stránka ukazuje další možnosti a souvislosti.

Úloha 1(10 bodů)
Kvantový lineární hamornický oscilátor s charakteristickou frekvencí ω je připraven ve stavu daném jako lineární kombinace základního a druhého excitovaného stavu $|\psi\rangle = A|0\rangle + B|2\rangle$, kde A a B jsou nějaké konstanty. Jaká je střední hodnota kinetické energie v tomto stavu a jak závisí na čase?

Řešení:
Nejsnazší je použít vyjádření kinetické energie pomocí kreačních a anihilačních operátorů a pak spočíst hledanou střední hodnotu z jejich známého působení na vlastní stavy harmonického oscilátoru. Z taháku si můžete připomenout vzorec

$$\hat{a} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}[\hat{x}/x_0 + i\hat{p}/p_0]$$

odtud vidíme

$$\hat{p}/p_0 = \tfrac{i}{\sqrt{2}}[\hat{a}^\dagger - \hat{a}], \qquad \hat{T} \equiv \frac{\hat{p}^2}{2m} = -\frac{p_0^2}{4m}[\hat{a}^\dagger - \hat{a}]^2 = \frac{\hbar\omega}{4}[\hat{a}^\dagger - \hat{a}]^2,$$

kam jsme dosadili hodnotu konstanty $p_0 = \sqrt{m\hbar\omega}$ z taháku. Ještě je dobré si uvědomit, že kreační a anihilační operátor spolu nekomutují, takže $[\hat{a}^\dagger - \hat{a}]^2 = (\hat{a}^\dagger)^2 + \hat{a}^2 + \hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger$. Hledaná střední hodnota tedy je

$$\langle\psi|\hat{T}|\psi\rangle = \frac{\hbar\omega}{4}\left(-B^*A\langle 0|\hat{a}^2|2\rangle - BA^*\langle 2|(\hat{a}^\dagger)^2|0\rangle + |A|^2\langle 0|\hat{a}\hat{a}^\dagger|0\rangle + |B|^2\langle 2|\hat{a}^\dagger\hat{a} + \hat{a}\hat{a}^\dagger|2\rangle\right).$$

V těchto výrazech jsme psali jen členy, které mají šanci být nenulové, protože stavy $|n\rangle$ jsou navzájem ortogonální a operátor $\hat{a}^\dagger$ zvyšuje n o jedna a $\hat{a}$ o jedna n snižuje. Výsledné maticové elementy pak snadno vyčíslíme z relací $\hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$ a $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$, takže

$$\langle 0|\hat{a}^2|2\rangle = \langle 2|(\hat{a}^\dagger)^2|0\rangle^* = \sqrt{2}, \qquad \langle 0|\hat{a}\hat{a}^\dagger|0\rangle = 1, \qquad \langle 2|\hat{a}^\dagger\hat{a}|2\rangle = 2, \qquad \langle 2|\hat{a}\hat{a}^\dagger|2\rangle = 3,$$

a tedy

$$\langle\hat{T}\rangle = \frac{\hbar\omega}{4}\left[-\sqrt{2}(A^*B + AB^*) + |A|^2 + 5|B|^2\right].$$

Jak víme časový vývoj stacionárních stavů $|n\rangle$ je dán jen fázovým faktorem $\exp(-iE_nt/\hbar) = \exp(-i(n+\frac{1}{2})\omega t)$, což odpovídá jen záměně konstant $A \to A\exp\left(-\frac{i}{2}\omega t\right)$ a $B \to B\exp\left(-\frac{5i}{2}\omega t\right)$.

Zajímavost: Z výrazu je vidět, že ve stacionárním stavu $|0\rangle$ (tj. pro B=0) je kinetická energie $\frac{1}{4}\hbar\omega$, zatímco ve stavu $|2\rangle$ (tj. pro A=0) je to $\frac{5}{4}\hbar\omega$. Člověk by si naivně myslel, že to bude největší možná hodnota, ale snadno se přesvědčíte, že malá příměs stavu $|0\rangle$ energii zvětší. Zkuste najít maximum!

Poznámky k Vašim řešením: Toto byla nejúspěšnější úloha (37 řešení s alespoň 5bodovým ziskem), ať již proto, že je zařazena jako první, nebo že její řešení bylo velmi přímočaré. Alternativou k řešení výše by bylo najít si v taháku vlnové funkce v x- nebo v p-reprezentaci a vypočíst střední hodnotu integrací, ale myslím, že by to bylo časově náročnější, pokud nejste extrémně zruční v integrování. Možná časem doplním pro úplnost vzorové řešení ještě tímto způsobem.

Úloha 2(10 bodů)
Dvě částice se spinem 1/2 jsou připraveny v čase $t = 0$ ve stavu $|\psi\rangle = |\text{-}\rangle \otimes |\text{-}\rangle$ se z-složkou spinu obou částic rovnou $-\frac{\hbar}{2}$. Uvažujeme časový vývoj určený hamiltoniánem

$$\hat{H} = \omega[\hat{s}_x^{(1)} + \hat{s}_x^{(2)}] + \frac{\lambda}{\hbar}\vec{s}^{(1)} \cdot \vec{s}^{(2)},$$

Kde $\vec{s}^{(i)} = (\hat{s}_x^i, \hat{s}_y^i, \hat{s}_z^i)$ je vektor operátorů spinového momentu hybnosti i-té částice a ω, λ reálné konstanty. Jaká je pravděpodobnost, že u první částice naměříme v čase $t > 0$ z-složku spinu $+\frac{\hbar}{2}$ a jaký bude stav bezprostředně po tomto měření?

Řešení:(standardní)
Časový vývoj najdeme rozkladem stavu do vlastních stavů hamiltoniánu. Pro jejich nalezení stačí si uvědomit, že první člen je x-ová složka celkového spinu a druhý člen lze napsat pomocí jeho kvadrátu z identity $\hat{S}^2 = (\vec{s}^{(1)} + \vec{s}^{(2)})^2 = (s^{(1)})^2 + 2\vec{s}^{(1)} \cdot \vec{s}^{(2)} + (s^{(2)})^2$, jak jsme to dělali na cvičení, takže stacionární stavy jsou společné vlastní stavy $|SM_x\rangle$ kvadrátu celkového spinu $\hat{S}^2$ je jeho z-složky

$$\hat{H}|SM_x\rangle = \left\{\hbar\omega M_x + \tfrac{1}{2}\hbar\lambda[S(S+1) - \tfrac{3}{4} - \tfrac{3}{4}]\right\}|SM_x\rangle,$$

Kde výraz v závorce udává energii E_{S,M_x} stavu. Tyto vektory umíme vyjádřit pomocí separované báze (píšeme jen $|SM_x\rangle$ pro S=1)

$$\begin{array}{lcll}
|11\rangle_x & = & |{+}{+}\rangle_x & = \frac{1}{2}\{|{+}{+}\rangle + |{+}{-}\rangle + |{+}{-}\rangle + |{-}{-}\rangle\} \\
|10\rangle_x & = & \frac{1}{\sqrt{2}}\{|{+}{-}\rangle_x + |{-}{+}\rangle_x\} & = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|{+}{+}\rangle - |{-}{-}\rangle\} \\
|1\text{-}1\rangle_x & = & |{-}{-}\rangle_x & = \frac{1}{2}\{|{+}{+}\rangle - |{+}{-}\rangle - |{+}{-}\rangle + |{-}{-}\rangle\}
\end{array}$$

Povšiměte si, že v za prvním rovnítkem máme vektory vyjádřené v bázi operátorů $\hat{s}_x$ jednotlivých částic a proto jsme je z dalším rovnítkem rozepsali v bázi $\hat{s}_z$ v níž je zadaný stavový vektor $|\psi\rangle$ přičemž jsme použili vztahy

$$|{+}\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(|{+}\rangle + |{-}\rangle), \qquad |{-}\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(|{+}\rangle - |{-}\rangle).$$

Pohledem na vyjádření stavů $|SM_x\rangle$ výše vidíme

$$|\psi\rangle = |{-}{-}\rangle = \frac{1}{2}\left\{|11\rangle_x + |1\text{-}1\rangle_x + \sqrt{2}|10\rangle_x\right\}$$

Časový vývoj tohoto stavu dostaneme vynásobením stavů příslušným faktorem $\exp(-itE_{SM_x}/\hbar)$ s energií $E_{SM_X}/\hbar = \omega M_x + \lambda/4$ pro $S = 1$ neboli

$$\begin{aligned}
|\psi\rangle &= \frac{1}{2}e^{-\frac{i\lambda t}{4}}\left\{|11\rangle_x e^{-i\omega t} + |1\text{-}1\rangle_x e^{i\omega t} + \sqrt{2}|10\rangle_x\right\} \\
&= \frac{1}{2}e^{-\frac{i\lambda t}{4}}\left\{|{+}{+}\rangle(\cos\omega t - 1) + |{-}{-}\rangle(\cos\omega t + 1) + (|{+}{-}\rangle + |{-}{+}\rangle)\, i\sin\omega t\right\},
\end{aligned}$$

kam jsme zpátky dosadili vyjádření vektorů $|SM_x\rangle_x$ v původní bázi $|m_z^{(1)}m_z^{(2)}\rangle$. Měření, které nalezlo první částici ve stavu $|{+}\rangle$, pak vybere jen členy v nichž je první znaménko plus

$$|\psi'\rangle = \hat{P}_{+} \otimes \hat{I}\,|\psi\rangle = \frac{1}{2}e^{-\frac{i\lambda t}{4}}\left\{|{+}{+}\rangle(\cos\omega t - 1) + |{+}{-}\rangle i\sin\omega t\right\},$$

a hledaná pravděpodobnost je dána kvadrátem normy tohoto vektoru

$$p_{1+} = \frac{1}{4}(\cos\omega t - 1)^2 + \frac{1}{4}(\sin\omega t)^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos\omega t) = \left(\sin\frac{\omega t}{2}\right)^2.$$

Poznámky k vašim řešením:
Úloha patřila k obtížnějším, jak je vidět z i z toho, že se mi sešlo jen 10 řešení jimž jsem mohl dát alespoň 5 bodů. Nicnéně někteří z Vás zaregistrovali některé možné zkratky, kterými se dá řešení urychlit. Pokusím se ukázat níže. Dále byly pokusy řešit úlohu v maticové reprezentaci, což vede na matici 4×4, jejíž vlastní čísla byste asi měli obtíže najít, ale je to také možnost.
Alaternativní řešení: (optimalizace postupu)
Řešení se dá urychlit, když si uvědomíme, že první a druhý člen v hamiltoniánu $\hat{H} = \hat{H}_\omega + \hat{H}_\lambda$ kumutují, protože první člen je úměrný x-složce celkového spinového momentu a druhý člen ve tvaru skalárního součinu lze vyjádřit jako funkce kvadrátu celkového spinového momentu. Evoluční operátor lze proto napsat jako součin $\hat{U}(t) = \exp(\hat{H}_\omega t/\hbar i)\exp(\hat{H}_\lambda t/\hbar i)$ Stav systému $|\psi\rangle$ je navíc vlastním vektorem druhého členu (odpovídá stavu $|SM_z\rangle$ pro $S = 1$, $M_z = 1$) s energií $E_\omega = \frac{\hbar\lambda}{2}[S(S+1) - \frac{3}{2}] = \frac{\hbar\lambda}{4}$. Tuto energii, jsme navíc vlastně vůbec nemuseli počítat, protože člen $\exp(\hat{H}_\lambda t/\hbar i)$ dá jen celkový fázový faktor $\exp(-i\frac{\lambda t}{4})$, který neovlivní žádné další měření. První členem hamiltoniánu (a evolučního operátoru) se musíme zabývat podrobněji, protože je vyjádřen pomocí x-ové složky spinu, zatímco stav je daný z-složkami. Přepíšeme proto stav pomocí vzorců

$$|+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle), \qquad |-\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - |-\rangle). \qquad |+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_x + |-\rangle_x), \qquad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_x - |-\rangle_x).$$

a rovnou můžeme aplikovat evoluční operátor, protože hodnota $M_x = m_x^{(1)} + m_x^{(2)}$ pro každý člen je již nyní dána

$$\begin{aligned} e^{\hat{H}_\omega t/\hbar i}|\psi\rangle &= e^{\hat{H}_\omega t/\hbar i}|--\rangle = \tfrac{1}{2}e^{\hat{H}_\omega t/\hbar i}\left\{|++\rangle_x + |--\rangle_x - |+-\rangle_x - |-+\rangle_x\right\} = \\ &= \tfrac{1}{2}\left\{e^{-i\omega t}|++\rangle_x + e^{i\omega t}|--\rangle_x - |+-\rangle_x - |-+\rangle_x.\right\} \end{aligned}$$

Po měření z-složky spinu prní částice a nalezení jeho kladné hodnoty přejde systém do stavu $|\psi'\rangle = \hat{P}_{+z} \otimes \hat{I}\,|\psi(t)\rangle$, který snadno nalezneme, když si uvědomíme, že projektor $\hat{P}_{+z} = |+\rangle\langle +|$ působí jen na stav první částice podle vzorců $\hat{P}_{+z}|+\rangle_x = \hat{P}_{+z}|-\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle$, jak je vidět ze vzorců pro přechod mezi $|\pm\rangle_x$ a $|\rangle\pm \equiv |\pm\rangle_z$ a tedy

$$|\psi'\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}|+\rangle \otimes \left\{e^{-i\omega t}|+\rangle_x + e^{i\omega t}|-\rangle_x - |-\rangle_x - |+\rangle_x.\right\}$$

(zkuste si ověřit, že je to až na fázi stejný vektor, jako v minulém řešení jen v jiné reprezentaci). Kvadrát tohoto vektoru pak dá stejnou pravděpodobnost $(1 - \cos\omega t)/2$ jako v řešení výše.

Úloha 3(10 bodů)
Částice v 1D nekonečně hluboké potenciálové jámě s potenciálem $V(x) = 0$, pro $x \in \langle 0, a \rangle$ a s hodnotou $V = \infty$ jinde, je připravena ve stavu který je lineární kombinací základního a prvního excitovaného stavu. Představte si, že potenciál najednou vypneme (tj. částice bude volnou částicí se stejnou vlnovou funkcí). Jaká může být největší střední hodnota hybnosti takové částice?
Nápověda: Mohou se vám hodit následující integrály

$$\int_0^\pi \sin x \cos 2x \,\mathrm{d}x = -\tfrac{2}{3}, \qquad \int_0^\pi \sin 2x \cos x \,\mathrm{d}x = \tfrac{4}{3}, \qquad \int_0^\pi \sin x \cos x \,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \sin 2x \cos 2x \,\mathrm{d}x = 0.$$

Řešení:
V úloze je nejdříve třeba najít nejdříve základní a první excitovaný stav v nekonečně hluboké potenciálové jámě. Vzhledem k tomu, že jsme tuto úlohu probírali důkladně na cvičení a znáte ji už z úvodu do kvantové fyziky, tak jen stručně. V intervalu $x \in \langle 0, a \rangle$ je částice volná, takže vlnová funkce je kombinací rovinných vln, a nebo se z nich dají naskládat funkce sinus a cosinus (argumentu kx, kde $\hbar k = \sqrt{2mE}$). To bude lepší, protože víte z přednášky, že musí existovat reálné řešení. Vlnová funkce je navíc nulová tam, kde je potenciál nekonečný, speciálně na krajích intervalu $\psi(0) = \psi(a) = 0$. Podmínka v $x = 0$ vybere ze dvou řešení jen sinus a druhá podnínka je vlastně omezení na možné energie (které v úloze nepotřebujeme), ale hlavně na $k = n\pi x/a$. Takže základní a první excitovaný stav mají vlnové funkce

$$\phi_1(x) = \sqrt{\tfrac{2}{a}} \sin \tfrac{\pi x}{a}, \qquad \phi_2(x) = \sqrt{\tfrac{2}{a}} \sin \tfrac{2\pi x}{a},$$

kde jsme navíc napsali normalizační faktor. Ten je zvolen tak, aby norma vlnové funkce byla 1 (můžete integrovat, ale každý kdo to párkrát dělal si pamatuje, že integrál sinu nebo kosinu na druhou přes půlperiodu nebo její násobek je polovina délky integračního intervalu, protože ze symetrie je vidět, že integrál sinu a kosinu je stejný a dohromady se vysčítají na 1). Hledaná vlnová funkce tedy je

$$\psi(x) = \sqrt{\tfrac{2}{a}} \left[A \sin \tfrac{\pi x}{a} + B \sin \tfrac{2\pi x}{a}, \right],$$

Kde A a B jsou konstanty normované na $|A|^2 + |B|^2 = 1$.

V další části se pak úloha ptá na střední hodnotu operátoru hybnosti $\hat{p} = -i\hbar\partial$

$$\begin{aligned}
\langle \hat{p} \rangle = -i\hbar \int \psi^*(x)\psi'(x)\,\mathrm{d}x &= -i\hbar\, \tfrac{2}{a} \int_0^a \left(A^* \sin \tfrac{\pi x}{a} + B^* \sin \tfrac{2\pi x}{a} \right) \tfrac{\pi}{a} \left(A \sin \tfrac{\pi x}{a} + B \sin \tfrac{2\pi x}{a} \right) \mathrm{d}x \\
&= -i\hbar\, \tfrac{2}{a} \left\{ 2A^*B \int_0^\pi \sin y \cos 2y \,\mathrm{d}y + AB^* \int_0^\pi \sin 2y \cos y \,\mathrm{d}y \right\} \\
&= i\hbar\, \tfrac{2}{a} \tfrac{4}{3} \left\{ A^*B - AB^* \right\},
\end{aligned}$$

kde při přechodu na druhý řádek jsme udělali substituci $y = \frac{\pi x}{a}$ a při přechodu na třetí řádek jsme použili integrály z nápovědy. Tento výraz nabývá největší hodnoty $\frac{8}{3}\frac{\hbar}{a}$ například pro konstanty $A = \frac{i}{\sqrt{2}}$, $B = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Poznámky k Vašim řešením:
Úloha asi patřila ke středně obtížným (především časovými nároky). Dostal jsem 25 řešení, které jsem ohodnotil alespoň polovinou bodů. Nejčastější chybou bylo, že jste přehlédli, asymetrické umístění jámy a pokoušeli jste se hledat sudá a lichá řešení. Někteří řešitelé to udělali správně posunutím do bodu $x = a/2$, ale myslím, že výsledný postup byl časově náročnější.

Úloha 4(10 bodů)
Dvě částice se spinem 3/2 jsou připraveny ve stavu s maximální hodnotou celkového spinového momentu hybnosti a s projekcí momentu hybnosti na osu z rovnou 0. Najděte rozvoj tohoto stavu do separované báze. Jaké hodnoty z-složky spinu první částice a s jakou pravděpodobností můžeme naměřit v tomto stavu.

Řešení:
Jde o úlohu na přímočaré použití tabulky Clebschových-Gordanových koeficientů. Nejdříve je potřeba si uvědomit, že hodnoty čísla S určující maximální možný kvadrát celkového spinového momentu hybnosti $\hbar^2 S(S+1)$ jsou omezeny nerovností $0 = |s_1 - s_2| \leq s \leq (s_1 + s_2) = 3$. Takže stav, který hledáme je $|SM\rangle = |30\rangle$. V tabulce přiložené k zadání vyhledáme Clebschovy-Gordanovy koeficienty $C^{SM}_{s_1 m_1 s_2 m_2}$ pro $S = 3$, $M = 0$ a všechny povolené hodnoty m_1 a m_2

$$C^{30}_{\frac{3}{2}\text{-}\frac{3}{2}\frac{3}{2}\frac{3}{2}} = C^{30}_{\frac{3}{2}\frac{3}{2}\frac{3}{2}\text{-}\frac{3}{2}} = \sqrt{\tfrac{1}{20}} \qquad\qquad C^{30}_{\frac{3}{2}\text{-}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\frac{1}{2}} = C^{30}_{\frac{3}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}\text{-}\frac{1}{2}} = \sqrt{\tfrac{9}{20}},$$

Takže hledaný rozvoj stavu je

$$|30\rangle = \sum_{m_1 m_2} C^{30}_{s_1 m_1 s_2 m_2} |s_1 m_1\rangle |s_2 m_2\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{20}} \left|\tfrac{3}{2}\tfrac{3}{2}\right\rangle \left|\tfrac{3}{2}\text{-}\tfrac{3}{2}\right\rangle + \tfrac{3}{\sqrt{20}} \left|\tfrac{3}{2}\tfrac{1}{2}\right\rangle \left|\tfrac{3}{2}\text{-}\tfrac{1}{2}\right\rangle + \tfrac{3}{\sqrt{20}} \left|\tfrac{3}{2}\text{-}\tfrac{1}{2}\right\rangle \left|\tfrac{3}{2}\tfrac{1}{2}\right\rangle + \tfrac{1}{\sqrt{20}} \left|\tfrac{3}{2}\text{-}\tfrac{3}{2}\right\rangle \left|\tfrac{3}{2}\tfrac{3}{2}\right\rangle.$$

Z-složka spinu první částice je rovna postupně $\frac{3}{2}\hbar$, $\frac{1}{2}\hbar$, -$\frac{1}{2}\hbar$, -$\frac{3}{2}\hbar$ pro první, druhý, třetí a čtvrtý člen tohoto rozkladu a pravděpodobnost naměření těchto hodnot v tomto stavu je tudíž rovna kvadrátu absolutní hodnoty koeficientu před těmito členy, tj.

$$p_{\hbar/2} = p_{-\hbar/2} = \frac{9}{20}, \qquad\qquad p_{3\hbar/2} = p_{-3\hbar/2} = \frac{1}{20}.$$

Pro kontrolu je vhodné si explicitně uvědomit, že součet těchto pravděpodobností je jedna.

Rozumné **alternativní řešení** patrně nevymyslíme, ale někteří z vás, ať už protože chtěli ukázat, že to umí, nebo protože nechtěli pracovat s tabulkami, odvodili rozklad do separované báze opakovanou aplikací posunovacího operátoru $S_- = s_-^{(1)} + s_-^{(2)}$. Při tom je dobré si předem rozmyslet, že na pravé straně se při působení operátoru $s_-^{(i)}$ na stav $|s_i m_i\rangle$ postupně pro $m_i = 3/2, 1/2$ a $-1/2$ objeví normovací faktor $\sqrt{(s_i + m_i)(s_i - m_i + 1)} = \sqrt{3.1}$, $\sqrt{2.2}$ a $\sqrt{1.3}$ a na levé straně působením na $|SM\rangle$ pro $M = 3, 2, 1$ postupně $\sqrt{(S+M)(S-M+1)} = \sqrt{6.1}$, $\sqrt{5.2}$ a $\sqrt{4.3}$, takže dostáváme (všem doporučuji rozmyslet, napsal jsem to tak, aby prefaktory byly očividné) stejný výsledek jako výše

$$\begin{aligned}
|33\rangle &= \left|\tfrac{3}{2}\tfrac{3}{2}\right\rangle \left|\tfrac{3}{2}\tfrac{3}{2}\right\rangle, \\
|32\rangle &= \tfrac{\sqrt{3.1}}{\sqrt{6.1}} \left|\tfrac{3}{2}\tfrac{3}{2}\right\rangle \left|\tfrac{3}{2}\tfrac{1}{2}\right\rangle + \tfrac{\sqrt{3.1}}{\sqrt{6.1}} \left|\tfrac{3}{2}\tfrac{1}{2}\right\rangle \left|\tfrac{3}{2}\tfrac{3}{2}\right\rangle, \\
|31\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \tfrac{\sqrt{2.2}}{\sqrt{5.2}} \left|\tfrac{3}{2}\tfrac{3}{2}\right\rangle \left|\tfrac{3}{2}-\tfrac{1}{2}\right\rangle + 2\tfrac{\sqrt{3.1}}{\sqrt{5.2}} \left|\tfrac{3}{2}\tfrac{1}{2}\right\rangle \left|\tfrac{3}{2}\tfrac{1}{2}\right\rangle + \tfrac{\sqrt{2.2}}{\sqrt{5.2}} \left|\tfrac{3}{2}-\tfrac{1}{2}\right\rangle \left|\tfrac{3}{2}\tfrac{3}{2}\right\rangle \right\}, \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left|\tfrac{3}{2}\tfrac{3}{2}\right\rangle \left|\tfrac{3}{2}-\tfrac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{3} \left|\tfrac{3}{2}\tfrac{1}{2}\right\rangle \left|\tfrac{3}{2}\tfrac{1}{2}\right\rangle + \left|\tfrac{3}{2}-\tfrac{1}{2}\right\rangle \left|\tfrac{3}{2}\tfrac{3}{2}\right\rangle \right\}, \\
|30\rangle &= \tfrac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \tfrac{\sqrt{1.3}}{\sqrt{4.3}} \left|\tfrac{3}{2}\tfrac{3}{2}\right\rangle \left|\tfrac{3}{2}\text{-}\tfrac{3}{2}\right\rangle + \left[\tfrac{\sqrt{3.1}}{\sqrt{4.3}} + \tfrac{\sqrt{3}\sqrt{2.2}}{\sqrt{4.3}} \right] \left|\tfrac{3}{2}\tfrac{1}{2}\right\rangle \left|\tfrac{3}{2}\text{-}\tfrac{1}{2}\right\rangle + \left[\tfrac{\sqrt{3}\sqrt{2.2}}{\sqrt{4.3}} + \tfrac{\sqrt{3.1}}{\sqrt{4.3}} \right] \left|\tfrac{3}{2}\text{-}\tfrac{1}{2}\right\rangle \left|\tfrac{3}{2}\tfrac{1}{2}\right\rangle + \tfrac{\sqrt{1.3}}{\sqrt{4.3}} \left|\tfrac{3}{2}\text{-}\tfrac{3}{2}\right\rangle \left|\tfrac{3}{2}\tfrac{1}{2}\right\rangle \right\}.
\end{aligned}$$

Poznámky k Vašim řešením:
Tuto úlohu lze charakterizovat jako záchranou úlohu na níž lze snadno získat 10 bodů, což se i většině řešitelů, kteří se do úlohy pustili, podařilo (odevzdáno 31 řešení, bez chyb či jen s drobnými překlepy).

Úloha 5(10 bodů)
Bezstrukturní částice je připravena ve stavu $|\psi\rangle$ s energií $E > 0$ a s kvadrátem orbitálního momentu hybnosti $2\hbar^2$. Z-složka orbitálního momentu hybnosti není určená, ale víme, že kdybychom měřili pravděpodobnost, že se částice pohybuje ve směru $\vec{n} = \vec{p}/p = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$ nebo $\vec{n} = (0, 0, 1)$ dostaneme vždy nulovou hodnotu. Jaká je vlnová funkce $\psi(x, y, z)$ takového stavu (nemusíte normovat)? Jaká je pravděpodobnost naměření různých hodnot z-tové složky momentu hybnosti. Jaký je nejpravděpodobnější směr hybnosti částice?

Řešení:
Klíčem k řešení je uvědomit si, že otázky směřují k měření hybnosti částice, takže bude vhodné přemýšlet nad stavem částice v hybnostní reprezentaci. Vlnová funkce $\psi(p_x, p_y, p_z)$ je společným vlastním stavem orbitálního momentu hybnosti (odpovídající hodnotě kvadrátu momentu hybnosti $2\hbar^2 = l(l+1)\hbar^2$ pro $l = 1$) a energie a můžeme ji tedy předpokládat ve tvaru

$$\psi(p_x, p_y, p_z) = R(p)\left[aY_{10}(\vec{n}) + bY_{11}(\vec{n}) + cY_{1-1}(\vec{n})\right],$$

kde jsme velikost hybnosti označili p a Y_{lm} jsou sférické harmoniky závisející na směru hybnosti $\vec{n} = \vec{p}/p$ a a, b, c jsou neznámé konstanty. Radiální část vlnové funkce je pro další řešení úlohy nepodstatná, ale z přednášky víme, že pro volnou částici s hmotností m by byla úměrná deltafunkci $R(p) \sim \delta(p - \sqrt{2mE})$. Z přednášky dále víme, že sférické harmoniky v hybnostní reprezentaci mají stejnou formu jako v souřadnicové reprezentaci, takže můžeme z taháku dosadit

$$Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}n_z, \qquad Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}(n_x + in_y), \qquad Y_{1-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}(n_x - in_y).$$

Vlnová funkce tedy má tvar

$$\psi(p_x, p_y, p_z) = \tilde{R}(p)\left[a\sqrt{2}\,n_z - b\,(n_x + in_y) + c\,(n_x - in_y)\right],$$

kde jsme schovali nepříjemný faktor $\tilde{R}(p) = \sqrt{3/8\pi}R(p)$ v radiální části. Dále ze zadání víme, že pravděpodobnost pohybu ve dvou zadaných směrech je rovna nule, tedy i kvadrát vlnové funkce, tedy i funkce samotná v těchto směrech je nula $\psi(\vec{n}) = \psi(0, 0, 1) = \psi(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) = 0$, takže

$$a\sqrt{2} = 0, \qquad \text{a} \qquad -b\,\frac{1+i}{\sqrt{2}} + c\,\frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

Tyto rovnice jsou splněny pro $a = 0$, $b = (1-i)/(1+i)c = -ic$, tedy například pro $c = 1 + i$ je

$$\psi(p_x, p_y, p_z) = \tilde{R}(p)\left[(i-1)(n_x + in_y) + (1+i)(n_x - in_y)\right] = \tilde{R}(p)2i\left[n_x - n_y\right].$$

To je funkce úměrná (až na fázový faktor) rozdílu $n_x - n_y$, tj. projekci vektoru $\vec{n}$ do směru $\vec{n}_0 = (1, -1, 0)$. A to je také nejpravděpodobnější směr pohybu částice (nebo směr opačný $-\vec{n}_0 = (-1, 1, 0)$). Všiměte si, že to je směr kolmý na oba směry ze zadání, což odpovídá intuitivní představě o orientaci p-orbitalu.

Poznámky k vašim řešením:
Ačkoli to byla společně se 4. úloha úloha nejméně pracná, úspěšnost řešení byla spíše nižší (jen 12 řešení s nadpolovičním počtem bodů). Skoro nikdo si neuvědomil, že je třeba pracovat v hybnostní reprezentaci a že sférické harmoniky to nezmění. Trochu lituji, že jsem v zadání úlohy nezdůraznil, že mám na mysli volnou částici. Možná by to přispělo k tomu, aby se vaše myšlenky ubíraly správným směrem, i když pro řešení úlohy to není nezbytný předpoklad.