

Zápočtová písemka z kvantové mechaniky I

čas na řešení: 90min

Úloha 1(10 bodů)

Kvantový lineární hamornický oscilátor s charakteristickou frekvencí ω je připraven ve stavu daném jako lineární kombinace základního a druhého excitovaného stavu $|\psi\rangle = A|0\rangle + B|2\rangle$, kde A a B jsou nějaké konstanty. Jaká je střední hodnota kinetické energie v tomto stavu a jak závisí na čase?

Úloha 2(10 bodů)

Dvě částice se spinem $1/2$ jsou připraveny v čase $t = 0$ ve stavu $|\psi\rangle = |- \rangle \otimes |- \rangle$ se z-složkou spinu obou částic rovnou $-\frac{\hbar}{2}$. Uvažujeme časový vývoj určený hamiltoniánem

$$\hat{H} = \omega[\hat{s}_x^{(1)} + \hat{s}_x^{(2)}] + \frac{\lambda}{\hbar} \vec{s}^{(1)} \cdot \vec{s}^{(2)},$$

Kde $\vec{s}^{(i)} = (\hat{s}_x^i, \hat{s}_y^i, \hat{s}_z^i)$ je vektor operátorů spinového momentu hybnosti i -té částice a ω, λ reálné konstanty. Jaká je pravděpodobnost, že u první částice naměříme v čase $t > 0$ z-složku spinu $+\frac{\hbar}{2}$ a jaký bude stav bezprostředně po tomto měření?

Úloha 3(10 bodů)

Částice v 1D nekonečně hluboké potenciálové jámě s potenciálem $V(x) = 0$, pro $x \in \langle 0, a \rangle$ a s hodnotou $V = \infty$ jinde, je připravena ve stavu který je lineární kombinací základního a prvního excitovaného stavu. Představte si, že potenciál najednou vypneme (tj. částice bude volnou částicí se stejnou vlnovou funkcí). Jaká může být největší střední hodnota hybnosti takové částice?

Nápověda: Mohou se vám hodit následující integrály

$$\int_0^\pi \sin x \cos 2x \, dx = -\frac{2}{3}, \quad \int_0^\pi \sin 2x \cos x \, dx = \frac{4}{3}, \quad \int_0^\pi \sin x \cos x \, dx = \int_0^\pi \sin 2x \cos 2x \, dx = 0.$$

Úloha 4(10 bodů)

Dvě částice se spinem $3/2$ jsou připraveny ve stavu s maximální hodnotou celkového spinového momentu hybnosti a s projekcí momentu hybnosti na osu z rovnou 0. Najděte rozvoj tohoto stavu do separované báze. Jaké hodnoty z-složky spinu první částice a s jakou pravděpodobností můžeme naměřit v tomto stavu.

Úloha 5(10 bodů)

Bezstrukturní částice je připravena ve stavu $|\psi\rangle$ s energií $E > 0$ a s kvadrátem orbitálního momentu hybnosti $2\hbar^2$. Z-složka orbitálního momentu hybnosti není určená, ale víme, že kdybychom měřili pravděpodobnost, že se částice pohybuje ve směru $\vec{n} = \vec{p}/p = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$ nebo $\vec{n} = (0, 0, 1)$ dostaneme vždy nulovou hodnotu. Jaká je vlnová funkce $\psi(x, y, z)$ takového stavu (nemusíte normovat)? Jaká je pravděpodobnost naměření různých hodnot z-tové složky momentu hybnosti. Jaký je nejpravděpodobnější směr hybnosti částice?