Úloha 3: Moment hybnosti v dvourozměrném oscilátoru

Termín odevzdání: 24. listopadu

Izotropní dvourozměrný harmonický oscilátor je užitečný model, například pro popis "bending" vibrací molekuly CO_2. Uvažujme takový oscilátor s hamiltoniánem

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(\hat{x}^2 + \hat{y}^2) = \hat{H}_x + \hat{H}_y.$$

Rozmyslete si, že stacionární stavy takového oscilátoru vlastně znáte, protože operátory $\hat{H}_x = \hat{h} \otimes \hat{I}$ a $\hat{H}_y = \hat{I} \otimes \hat{h}$ jsou triviálním rozšířením hamiltoniánu $\hat{h}$ jednorozměrného oscilátoru, napsaného v proměnné x nebo y, tj. stacionární stavy se dají napsat v separovaném tvaru

$$|mn\rangle = \frac{(\hat{a}_x^\dagger)^m}{\sqrt{m!}} \frac{(\hat{a}_y^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |00\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^m}{\sqrt{m!}}|0\rangle \otimes \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle,$$

kde jsme zavedli operátor $\hat{a}_x^\dagger = \hat{a}^\dagger \otimes \hat{I}$ excitace ve směru x, a operátor $\hat{a}_y^\dagger = \hat{I} \otimes \hat{a}^\dagger$ excitace ve směru y. Vlnová funkce takového stavu pak je v souřadnicové reprezentaci daná vzorcem $\psi_{mn}(x, y) = \phi_m(x)\phi_n(y)$ pomocí vlastních funkcí ϕ_n jednorozměrného oscilátoru (viz tabulka níže).

1. Ukažte, že operátor momentu hybnosti $\hat{L} = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x$ je zachovávající se veličina. (2 body)

2. Ukažte, že operátory $\hat{H}$ i $\hat{L}$ lze napsat pomocí operátorů počtu cirkulárních kvant $\hat{N}_+ = \hat{a}_+^\dagger \hat{a}_+$ a $\hat{N}_- = \hat{a}_-^\dagger \hat{a}_-$, kde jsme zavedli kreační operátory $\hat{a}_\pm^\dagger = (\hat{a}_x^\dagger \pm i\hat{a}_y^\dagger)/\sqrt{2}$. (3 body)

3. Operátory $\hat{N}_+$ a $\hat{N}_-$ komutují a jejich společné vlastní stavy lze najít působením operátorů $\hat{a}_\pm^\dagger$ na vektor základního stavu $|00\rangle$. Najděte vztah mezi vlastními čísly n_+ a n_- těchto operátorů a vlastními čísly operátorů $\hat{H}$ a $\hat{L}$. Najděte vlnové funkce těchto společných vlastních stavů pro tři nejnižší energie $\hbar\omega$, $2\hbar\omega$, $3\hbar\omega$. (3body)

4. Jaké hodnoty energie a momentu hybnosti a s jakou pravděpodobností, můžeme naměřit ve stavu popsaném vlnovou funkcí (2body)

$$\psi(x, y) = xye^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)/x_0^2}.$$

Nápověda: Vlnové funkce $\phi_n(x) = \langle x|n\rangle$ tří nejnižších stavů jednorozměrného harmonického oscilátoru jsou

$$\phi_0(x) = Ae^{-\frac{1}{2}q^2}, \qquad \phi_1(x) = A\sqrt{2}qe^{-\frac{1}{2}q^2}, \qquad \phi_2(x) = \frac{A}{\sqrt{2}}(2q^2 - 1)e^{-\frac{1}{2}q^2},$$

kde $A^{-2} = x_0\sqrt{\pi}$ je normalizační konstanta $q = x/x_0$ a $x_0^2 = \frac{\hbar}{m\omega}$.