Zápočtová písemka z kvantové teorie I (podzim 2024)

čas na řešení: 90min

Úloha 1(10 bodů)
V prostoru stavů částice v 1D máme operátor $\hat{A} = \alpha\{|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| - |0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 0|\}$ vyjádřený pomocí stacionárních stavů $|n\rangle$ harmonického oscilátoru s konstantou $x_0 = \sqrt{\hbar/m\omega} = 1$. Je tento operátor pro $\alpha > 0$ pozitivně definitní? Jedná se o omezený operátor? Najděte nějakou netriviální (tj. ne násobek $\hat{I}$) pozorovatelnou, která je kompatibilní s pozorovatelnou $\hat{A}$. Najděte konstantu α tak, aby byl $\hat{A}$ projekčním operátorem a vypočtěte $\cos(\frac{\pi}{2}\hat{A})$.

Úloha 2(10 bodů)
Na prostoru kvantové trojtečky daném lineárním obalem tří ortonormálních vektorů $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ je (pro $\omega > 0$) dán operátor hamiltoniánu $\hat{H} = \hbar\omega\sqrt{2}\,(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 3| + |3\rangle\langle 2|)$ a pozorovatelná $\hat{P} = |2\rangle\langle 2| + |1\rangle\langle 3| + |3\rangle\langle 1|$. V čase $t = 0$ připravíme částici ve stavu $|\psi\rangle = |1\rangle$. V jakém čase je maximální pravděpodobnost nalézt částici ve druhé tečce? V jakém ve třetí? Jaká je střední hodnota pozorovatelné $\hat{P}$ v těchto časech?

Úloha 3(10 bodů)
Dvě částice se spinem 1/2 jsou připraveny ve stavu $|\psi\rangle = |\mathtt{x+}\rangle \otimes |\mathtt{z-}\rangle + |\mathtt{z-}\rangle \otimes |\mathtt{x+}\rangle$. Měřením z-složky spinu první částice nalezneme hodnotu $\frac{1}{2}\hbar$. Jaké hodnoty a s jakou pravděpodobností můžeme naměřit následným měřením z-složky spinu druhé částice? Jak se změní odpověď na tuto otázku pokud v prvním měření nalezneme hodnotu $-\frac{1}{2}\hbar$.

Úloha 4(10 bodů)
V prostoru stavů bodové částice $L^2(\mathbb{R}^3)$ mějme bázi ze společných vlastních vektorů $|k, l, m\rangle$ operátorů kinetické energie, kvadrátu a z-složky orbitálního momentu hybnosti $\{\hat{H}_0, \hat{L}^2, \hat{L}_z\}$ odpovídající vlastním číslům $\{\frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \hbar^2 l(l+1), \hbar m\}$. Navíc předpokládáme stavy normalizovány jako $\langle k, l, m|k', l', m'\rangle = \delta(k - k')\delta_{ll'}\delta_{mm'}$. V této reprezentaci je částice popsána vlnovou funkcí $\psi(k, l, m) = \frac{1}{\sqrt{k_0}}\chi_{\langle 0, k_0\rangle}(k)\delta_{l0}, \delta_{m0}$, kde $\chi_{\langle 0, k_0\rangle}(k)$ je charakteristická funkce intervalu, rovná 1 na intervalu $\langle 0, k_0\rangle$ a 0 jinde. Najděte hustotu pravděpodobnosti výskytu částice v místě $\vec{r} = (x, y, z)$. V okolí kterých bodů je nulová pravděpodobnost nalézt tuto částici? Konstanta k_0 má hodnotu $2\pi/a_0$, kde a_0 je Bohrův poloměr.

Úloha 5(10 bodů)
Spin-orbitální moment hybnosti $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ elektronu definujeme jakou součet orbitálního a spinového momentu hybnosti. Uvažujme elektron v atomu vodíku ve stavu s hlavním kvantovým číslem $n = 2$, s orbitálním kvantovým číslem $l = 1$, s minimální možnou hodnotou J^2 a s jeho projekcí na osu z $J_z = \frac{1}{2}\hbar$. Kterým směrem od protonu je nejpravděpodobnější nalézt tento elektron? Jakou z-složku spinu a s jakou pravděpodobností u něj můžeme naměřit?

Mohou se hodit:

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}\mathrm{d}x = n! \qquad \int_{-\infty}^\infty e^{-ax^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad \int_0^\infty \frac{1}{x^2}[1-\cos(x)]^2 dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\infty x e^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \qquad \int_{-\infty}^\infty x^2 e^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x)^2 dx = \frac{\pi}{2}$$