

# Úloha 1: Kvantové tečky.

Termín odevzdání: 24. října

Kvantovou tečku si můžete představit jako malou krabičku (např. kousek kovu; viz obrázek vlevo dole), do které lze umístit částici (např. elektron) tak, že se tam nemůže hýbat. Když dáme 3 takové tečky vedle sebe (viz schéma vpravo dole), může částice přeskakovat mezi tečkami tunelováním. Stavový prostor takového systému je  $\mathcal{H} = \mathbb{C}^3 = \text{span}\{|A\rangle, |B\rangle, |C\rangle\}$ , tj. lineární obal vektorů  $|d\rangle$ , označujících stav, kdy částice je v tečce  $d = A, B, C$ . Předpokládejte, že tyto vektory tvoří ortonormální bázi v  $\mathcal{H}$ . Definujeme hermitovský operátor:

$$\hat{P} = i \{|A\rangle\langle C| - |C\rangle\langle A|\}$$

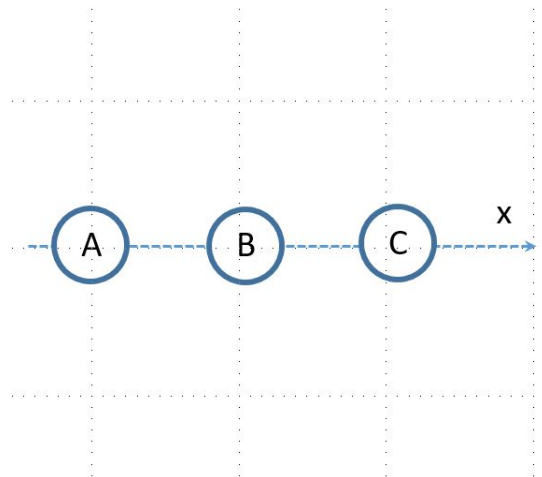
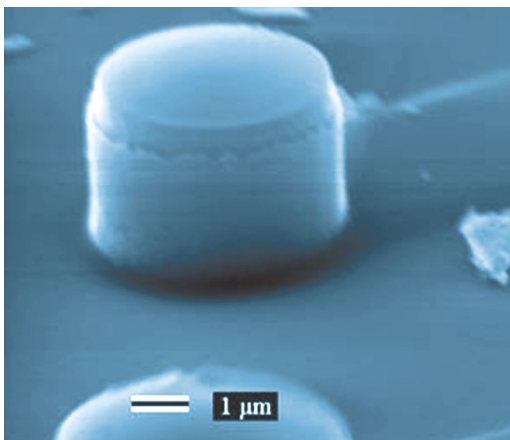
a dále předpokládejme, že Hamiltonián  $\hat{H}$  splňuje

$$\langle A|\hat{H}|A\rangle = \langle B|\hat{H}|B\rangle = \langle C|\hat{H}|C\rangle = \epsilon_0,$$

$$\langle A|\hat{H}|B\rangle = te^{i\alpha}, \quad \langle B|\hat{H}|C\rangle = te^{i\gamma}$$

a  $\langle A|\hat{H}|C\rangle = 0$ , kde  $\epsilon_0$ ,  $t$ ,  $\alpha$  a  $\gamma$  jsou reálné konstanty.

1. Spočítejte operátory  $\hat{P}^0$ ,  $\hat{P}^2$ ,  $e^{\hat{P}}$  a  $|\hat{P}|$ . (4 body)
2. Ukažte, že vhodnou fázovou konvencí  $|a\rangle = e^{i\delta_a}|A\rangle$ ,  $|b\rangle = e^{i\delta_b}|B\rangle$ ,  $|c\rangle = e^{i\delta_c}|C\rangle$  lze dosáhnout toho, že matice  $\hat{H}$  v bázi  $|a\rangle$ ,  $|b\rangle$ ,  $|c\rangle$  je reálná. (2 body)
3. Systém je připraven ve vlastním stavu operátoru  $\hat{P}$  s největší možnou vlastní hodnotou. Jaké hodnoty energie  $\hat{H}$  a s jakou pravděpodobností můžeme nalézt. (4 body)



Obrázek kvantové tečky z elektronového mikroskopu (vlevo, *wikimedia*) a schéma symetrického uspořádání 3 teček v naší úloze (vpravo).