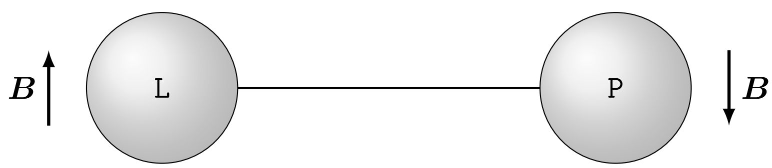
Úloha 2: Kvantové tečky v magnetickém poli.

Termín odevzdání: 7. listopadu

Uvažujme částici se spinem 1/2 v systému složeném ze dvou kvantových teček „L“ a „P“, mezi kterými může částice tunelovat. V každé z teček nechť je částice vystavena magnetickému poli s opačnou orientací. Systém pak může být popsaný hamiltoniánem

$$\hat{H} = a(|\mathtt{L}\rangle\langle\mathtt{L}| - |\mathtt{P}\rangle\langle\mathtt{P}|) \otimes \hat{S}_z + b(|\mathtt{L}\rangle\langle\mathtt{P}| + |\mathtt{P}\rangle\langle\mathtt{L}|) \otimes \hat{I}\,,$$

kde operátor spinu je definovaný jako $\hat{S}_z = \frac{1}{2}\hbar\sigma_z$ a operátor $\hat{I} = \sigma_z^2$ je jednotkový operátor ve spinových stupních volnosti. Konstantu a parametrizující sílu interakce spinu částice s magnetickým polem zvolme konkrétně jako $a = 2\omega\cos\alpha$, a konstantu b parametrizující efektivitu tunelování mezi tečkami zvolme jako $b = \hbar\omega\sin\alpha$.



1. Ukažte, že třetí složka spinu částice, s_z, se v takovém systému zachovává, na rozdíl od složek s_x a s_y. (1 bod)

2. Najděte střední hodnotu energie systému ve stavech

$$\Psi_1 = |\mathtt{L}\rangle|\uparrow\rangle, \qquad \Psi_2 = \tfrac{1}{2}(|\mathtt{L}\rangle|\uparrow\rangle + |\mathtt{P}\rangle|\uparrow\rangle + |\mathtt{L}\rangle|\downarrow\rangle + |\mathtt{P}\rangle|\downarrow\rangle). \quad \text{(2 body)}$$

3. Ukažte, že hamiltonián lze reprezentovat blokově diagonální maticí a najděte vlastní energie a normalizované vlastní stavy systému. (2 body)

4. Pro obecný počáteční stav $\Psi(0)$ systému najděte stav $\Psi(t)$ v čase $t > 0$. Můžete, ale *nemusíte*, použít výsledky předchozího bodu. (3 body)

5. Pro speciální případ $\Psi(0) = \Psi_2$ a konkrétní naladění interakcí $\alpha = \frac{\pi}{4}$ určete pravděpodobnost výskytu částice ve stavech $|\mathtt{L}\rangle|\uparrow\rangle$ a $|\mathtt{P}\rangle|\uparrow\rangle$ v čase $t = 0$ a v čase $t = \pi/2\omega$. (2 body)