Úloha 4: Interference momentu hybnosti.

Termín odevzdání: 8. prosince

Uvažujme kvantový systém, například volně rotující lineární molekulu, jehož stavový prostor můžeme ztotožnit s prostorem všech orientací (směrů) $\boldsymbol{n}$ ve 3D. Pomocí interferometru připravíme systém ve stavu $|\psi\rangle = |\psi_1\rangle + e^{i\alpha}|\psi_2\rangle$, tedy jako superpozici dvou dílčích stavů, které jsou zadané jako

$$\begin{aligned}
\psi_1(\boldsymbol{n}) &\equiv \langle \boldsymbol{n}|\psi_1\rangle = A\left(\sqrt{5}z^2 - \sqrt{8}z - \sqrt{5}\right) , \\
\psi_2(\boldsymbol{n}) &\equiv \langle \boldsymbol{n}|\psi_2\rangle = B\left(\sqrt{8}xz - x^2 - y^2\right) .
\end{aligned}$$

Zde $\boldsymbol{n} = (x, y, z)$, $|\boldsymbol{n}|^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 1$, je jednotkový směrový vektor udávající orientaci molekuly, a A, B a α jsou zatím neurčené reálné konstanty.

1. Rozviňte oba stavy ψ_1 a ψ_2 do báze sférických harmonik a najděte kladné reálné konstanty A a B tak, aby oba stavy byly normalizované, $||\psi_1|| = ||\psi_2|| = 1$. (5 bodů)
2. Rozhodněte, jakou hodnotu kvadrátu momentu hybnosti bychom naměřili s maximální pravděpodobností v každém ze stavů ψ_1 a ψ_2 zvlášť. (2 body)
3. S jakou relativní fází α musíme připravit stav ψ_2, aby hustota pravděpodobnosti v rovině xy ve výsledném stavu ψ byla nulová (molekula nemůže být orientovaná kolmo na osu z)? Jaká je nejpravděpodobnější naměřená hodnota kvadrátu momentu hybnosti v takovém stavu? (3 body)

Pomůcka – tabulka sférických harmonik:

$$Y_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \qquad Y_{2,\pm 2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}(x \pm iy)^2$$

$$Y_{1,\pm 1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}(x \pm iy) \qquad Y_{2,\pm 1} = \mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}}z(x \pm iy)$$

$$Y_{1,0} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}z \qquad Y_{2,0} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}(2z^2 - x^2 - y^2)$$