

Cvičení 2: Kvantová dvojtečka.

Motivace: procvičení formalismu kvantové teorie pro jednoduché systémy. Skládání stavových prostorů

1 Úloha 1

Povrch polovodiče lze upravit tak, že za určitých podmínek se může elektron vyskytovat pouze v určité lokalizované oblasti (kvantová tečka). Uvažujme povrch s dvěma takovými tečkami. Předpokládejte, že stavový prostor je dán lineárním obalem vektorů $|1\rangle$, $|2\rangle$ (elektron v tečce číslo 1 či 2). Operátor polohy elektronu definujeme jako

$$\hat{x} = |1\rangle\langle 1| + 2|2\rangle\langle 2|.$$

Předpokládejte, že operátor energie (hamiltonián) má následující tvar

$$\hat{h} = \epsilon_0 (|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|) + v (|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|),$$

kde ϵ_0 a v jsou reálná čísla.

- Jaké jsou možné hodnoty měření energie.
- Systém byl připraven v základním stavu (tj. byla naměřena nejmenší hodnota energie). Popište výsledek následného měření \hat{x} . Jaká je $\langle \hat{x} \rangle$ v tomto stavu a jaké je $\Delta x \equiv \sqrt{\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle}$

2 Úloha 2

Uvažujme stejný systém jako v předchozí úloze, ale do dvojtečky dáme dva elektrony (uvažujte elektrony jako rozlišitelné částice bez spinu).

- Jaký je stavový prostor systému? Zvolte vhodné značení.
- Představte si, že částice neinteragují, tj. jejich hamiltonián je $\hat{H} = \hat{h}^{(1)} + \hat{h}^{(2)}$, kde například $\hat{h}^{(1)}$ působí jen na první částici. Najděte jeho spektrum a vlastní vektory.
- Jaká je střední hodnota operátoru $\hat{x}^{(1)} - \hat{x}^{(2)}$ v základním stavu.
- Jaká je střední kvadratická vzdálenost částic v základním stavu, tj. jaké je $\sqrt{\langle (\hat{x}^{(1)} - \hat{x}^{(2)})^2 \rangle}$.

3 Úloha 3

Navrhněte jak modifikovat \hat{H} z předchozí úlohy, aby se zohlednilo, že obě částice nechtějí zůstat na stejné tečce (Coulombovská repulze). Odpovězte na otázky z předchozí úlohy pro nový hamiltonián.

Pokud zbude čas, další úlohy budou dále rozvíjet toto téma: ještě více teček, nebo více elektronů, nebo zahrneme do popisu spin elektronu, popřípadě existenci více (excitovaných) stavů v jedné tečce.