Cvičení 3: Hrátky s komutačními relacemi a symetriemi.

Nechť A, B, C jsou lineární operátory na Hilbertově prostoru:

- Pomocí jednoduchých komutátorů vyjádřete: $[AB, C]$ a $[A, BC]$.
- Pokud $[A, B] = 0$ pak $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B)$. Dokažte.

Nechť navíc operátory A i B komutují s $[A, B]$ a nechť $f(x)$ jen funkce, pak

- $[A, B^n] = nB^n[A, B]$
- $[A^n, B] = nA^n[A, B]$
- $[A, f(B)] = [A, B]f'(B)$
- $[f(A), B] = f'(A)[A, B]$
- Glauberova identita: $e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A,B]}$

Dokažte. *Nápověda:* integrujte vztah $F'(t) = A + B + t[A, B]F(t)$, kde $F(t) = e^{At}e^{Bt}$.

Pokud $[Q_\alpha, P_\alpha] = i\delta_{\alpha\beta}$ pak $J_\alpha \equiv \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} Q_\alpha P_\beta$ splňuje komutační relace $[J_\alpha, J_\beta] = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} J_\gamma$. Dokažte. *Nápověda:* využijte identitu $\varepsilon_{\alpha_1\beta_1\gamma}\varepsilon_{\alpha_2\beta_2\gamma} = \delta_{\alpha_1\alpha_2}\delta_{\beta_1\beta_2} - \delta_{\alpha_1\beta_2}\delta_{\beta_1\alpha_2}$

Vypočtěte $U(\phi) = \exp(-i\phi\sigma_x/2)$, kde σ_x je Pauliho matice. Ověřte, že $U(\pi/2)$ zobrazí vlastní vektory σ_z na vlastní vektory σ_y.

Uvažujte operaci dilatace $x \to x' = e^c x$, kde c je reálné číslo. Najděte komutační relaci generátoru D této operace na Hilbertově prostoru ($U(c) = \exp(-icD)$) s generátorem translace.