Cvičení 4: Kvantový řetízek.

Úloha 1: Jednoduchý řetízek

V minulých cvičeních jsme se setkali s kvantovými tečkami. Představte si nyní nekonečně dlouhý řetízek rovnoměrně rozmístěných kvantových teček. Částice se může vyskytovat v některé z nich, což popíšeme stavovým prostorem $\mathcal{H} = l^2$, s bází $\{|n\rangle, n \in \mathcal{Z}\}$. Jednoduchý hamiltonián, který respektuje symetrii tohoto systému lze napsat jako

$$H_0 = \sum_n \epsilon_0 |n\rangle\langle n| - t \sum_n \{|n\rangle\langle n+1| + |n+1\rangle\langle n|\}$$

Pro tento systém:

1. Najděte vlastní vektory a vlastní čísla hamiltoniánu $H_0|E\rangle = E|E\rangle$.
2. Najděte správnou normalizační konstantu tak, aby platilo $\langle E|E'\rangle = \delta(E - E')$.
3. Zamyslete se nad tím jaká je přesně množina vlastních vektorů, tj. "kolik" jich je a zda jsou některá vlasní čísla degenerovaná.
4. Ověřte relaci úplnosti $\sum_E |E\rangle\langle E| = I$

Nápověda: vlastní vektory hledejte ve tvaru

$$|\psi\rangle = \sum_n e^{ikn}|n\rangle.$$

Úloha 2: Polořetízek

Zamyslete se nad otázkami z předchozího cvičení pro polořetízek, tj. v bázi budou jen vektory $|n\rangle$ pro $n = 1, 2, 3, ...$

Nápověda: Vlnovou funkci lze hledat v podobném tvaru jako v předchozí úloze a odříznutí půlky řetízku lze dosáhnout okrajovou podmínkou $\langle 0|\psi\rangle = 0$.

Úloha 3: Řetízek s poruchou

Uvažujte stejnou úlohu jako 1, ale s hamiltoniánem

$$H = H_0 + v|0\rangle\langle 0|.$$

Nápověda: Vlnovou funkci hledejte ve stejném tvaru jako v předchozích úlohách. Modifikaci hamiltoniánu lze chápat jako napojování řešení na kvantové tečce $|0\rangle$.

Měření:

Pro úlohy výše:
Jakou hodnotu energie mohu naměřit pro systém připravený ve stavu $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$.
Jaká je střední hodnota energie v tomto stavu?
Jaká je variance ΔE měření energie v tomto stavu?

Pozn: Asi nestihneme všechno. Podle časových možností něco vynecháme.