Cvičení 4: Lineární harmonický oscilátor.

Úloha 1: závislost výchylky na čase

Mějme lineární harmonický oscilátor s hmotností m a s vlastní úhlovou frekvencí ω připravený ve stavu

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle,$$

kde $|n\rangle$ jsou vlastní vektory $a^\dagger a$ se standardní fázovou konvencí (tj. $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$).

1. Najděte α, β pro něž je střední hodnota $\langle X\rangle$ operátoru polohy maximální.
2. Najděte časovou závislost této veličiny v tomto stavu.
3. Najděte střední hodnotu $\langle X\rangle$ ve stavu $|n\rangle$.
4. Najděte varianci ΔX ve stavu $|n\rangle$.

Nápověda: použijte algebraických vlastností kreačních a anihilačních operátorů.

Úloha 2: Hermitovy polynomy

Hermitovy polynomy lze určit pomocí vytvářejícího funkcionálu $S(s,z) = \exp(-s^2 + 2sz)$ pomocí formule

$$S(s,z) = \sum_n \frac{H_n(z)}{n!} s^n.$$

1. Najděte tímto způsobem první tři Hermitovy polynomy.
2. Porovnejte nalezený výsledek s rerkurentní relací $H_{n+1}(z) = 2zH_n(z) - 2nH_{n-1}(z)$, $H_{-1} = 0$, $H_0 = 1$.
3. Ověřte pomocí vytvářejícího funkcionálu relaci $\int e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) = 2^n n! \sqrt{\pi}\delta_{mn}$.
4. Najděte explicitně vlnové funkce prvních pár stavů: $\langle x|0\rangle$, $\langle x|1\rangle$, $\langle x|2\rangle$.

Nápověda: Pro nalezení integrálu ve třetím bodě vyšetřujte $I(s,t) = \int \exp(-x^2) S(s,x) S(t,x) dx$.

Úloha 3: p-reprezentace

Jak vypadají vlnové funkce stacionárních stavů LHO $\langle p|n\rangle$ v p-reprezentaci? Oscilátor je připraven ve stavu $|\psi\rangle = |0\rangle + i|1\rangle$. Jaká je pravděpodobnost najít kladnou hybnost.

Úloha 4: Operátor posunutí

1. Ověřte, že operátor $\exp(-\alpha(a - a^\dagger))$ je unitární.
2. Najděte transformaci $UaU^\dagger$ anihilačního operátoru.
3. Najděte transformaci operátor $H = \hbar\omega[a^\dagger a + \lambda(a + a^\dagger)]$, kde λ je reálná konstanta.
4. Jaké je spektrum H?