Cvičení 7: Moment hybnosti.

Motivace: spřátelit se s kulovými funkcemi a posunovacími operátory

Úloha 1: kulové funkce jako homogenní polynomy

V kvantové chemii a fyzice pevných látek (viz např. Slater, Koster, *Phys. Rev.* **94**(1954)1498) se setkáme s bázovými funkcemi jež jsou označeny jako: s ($l = 0$); p_x, p_y, p_z ($l = 1$); d_{xy}, d_{yz}, d_{zx}, $d_{x^2-y^2}$, $d_{3z^2-r^2}$ ($l = 2$). Předpokládejte, že jde vždy o bázi ve vlastním prostoru operátoru kvadrátu orbitálního momentu hybnosti příslušející danému l tvořenou reálnými funkcemi θ a ϕ. Pokuste se najít tyto funkce a jejich vztah k tradičním sférickým harmonikám $Y_{lm}(\theta, \phi)$.

Nápověda: vzpomeňte si na charakterizaci vlastních podprostorů operátoru L^2 jako homogenních polynomů.

Úloha 2: Měření L

Stav bezstrukturní částice ve 3D prostoru je dán pomocí vlnové funkce v souřadnicové reprezentaci

$$\psi(\vec{r}) = (x + y + 3z) f(r),$$

kde $f(r)$ je nějaká hladká funkce radiální souřadnice $r = |\vec{r}|$. Je to vlastní funkce operátoru L^2? Pokud ano jaká je hodnota l? Jaká je pravděpodobnost nalezení různých hodnot m.

Úloha 3: Kvadrupól v nehomogenním el. poli (DU z roku 2010)

Uvažujte systém (částici) s momentem hybnosti $l = 1$. Báze stavového prostoru tedy je dána například vlastními vektory operátoru L_z: $|1\rangle$, $|0\rangle$, $|-1\rangle$ s vlastními hodnotami $\hbar$, 0, $-\hbar$. Předpokládejte, že Hamiltonián tohoto systému je

$$\hat{H} = \frac{\omega_0}{\hbar}\left(\hat{L}_u^2 - \hat{L}_v^2\right), \tag{1}$$

kde $\hat{L}_u^2$ a $\hat{L}_v^2$ jsou operátory projekce momentu hybnosti na osy dané vektory

$$\vec{e}_u = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x + \vec{e}_z), \qquad \vec{e}_v = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x - \vec{e}_z).$$

1. Napište matici Hamiltoniánu v bázi $|1\rangle$, $|0\rangle$, $|-1\rangle$ a najděte její vlastní hodnoty E_1, E_2, E_3 a příslušné stacionární stavy $|E_1\rangle$, $|E_2\rangle$, $|E_3\rangle$.

2. Jaký je časový vývoj stavu připraveného v čase $t = 0$:

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |-1\rangle)?$$

3. Jaká by byla pravděpodobnost naměření různých hodnot L_z v tomto stavu v čase t?

4. V čase t provedeme měření L_z^2 a naměříme hodnotu $\hbar^2$. Jak bude vypadat stav po měření a jaký bude jeho další časový vývoj?