

Úloha 3: 2D harmonický oscilátor.

Termín odevzdání: 6. prosince

Mějme lineární harmonický oscilátor ve dvou dimenzích s hamiltoniánem

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2),$$

připravený ve stavu

$$\psi(x, y) = x^2 \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2x_0^2}\right),$$

kde $x_0 = \sqrt{\hbar/m\omega}$. Dále definujeme operátor momentu hybnosti $L = xp_y - yp_x$.

1. Jsou H a L kompatibilní pozorovatelné? (2 body)
2. Jaká je časová závislost vlnové funkce ψ . (2 body)
3. Jaké hodnoty momentu hybnosti můžeme naměřit v tomto stavu a s jakou pravděpodobností? (4body)
4. Jaký bude časový vývoj stavu po měření? (2 body)

Nápověda: Úlohu můžete řešit v souřadnicové reprezentaci s použitím známých vlnových funkcí harmonického oscilátoru v jedné dimenzi a šikovním vyjádřením operátoru L (ten má v polárních souřadnicích stejný tvar jako L_z ve třech dimenzích v souřadnicích sférických). Jeho vlastní vektory jsou tedy úměrné $(x + iy)^m$. Rozklad ψ do nich lze najít přímo, nebo v polárních souřadnicích Fourierovou řadou.

Alternativou je řešit vše algebraicky, zavedením anihilačního operátoru pro x-souřadnici a hybnost a pro y-souřadnici a hybnost. Operátor L lze vyjádřit pomocí těchto operátorů a vyjádřit jej jako matice v každém vlastním podprostoru H . Také si všimněte, že vlnová funkce ψ je úměrná dvojnásobnému působení operátoru x na základní stav.