III. Důsledky Galileiho invariance

(kinematika a dynamika částice)

teorie Lieových grup → přednáška Karel Houfek

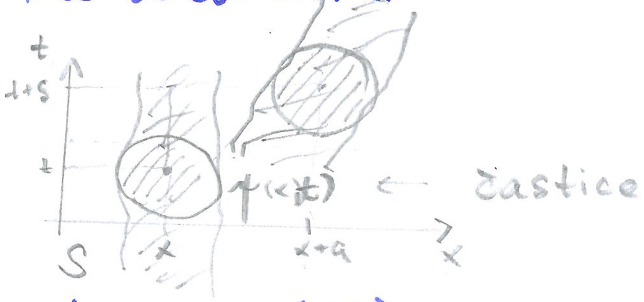
filosofie:

Předpovědi QM nezávisí na volbě s.s. ...

Galilei-transformace:

$$\boxed{\begin{aligned} \tau:\quad & x \to x' = Rx + a + vt \\ & t \to t' = t + s \end{aligned}}$$

Nemazat



galileiho transformace tvoří grupu: (66)

.. $\forall\, \tau_1; \tau_2\ \exists$ transformace $\tau = \tau_1 \circ \tau_2$:

$$x' = R_2(R_1 x + a_1 + v_1 t) + a_2 + v_2(t + s_1) = R_2 R_1 x + (a_1 + a_2 + v_2 s_1) + (v_1 + v_2)t$$

$$t' = t + s_1 + s_2 \qquad \text{tj. } R = R_2 R_1;\ v = v_1 + v_2,\ s = s_2 + s_1,\ a = a_1 + a_2 + v_2 s_1$$

skládání zobrazení splňuje axiomy grupy (asoc., exist 1, exist. inverse)

počet volných parametrů: $R(\vec{\theta}), \vec{a}, \vec{v}, s$ ... 10

-- Stoneův teorém ... $\exists$ 10 generátorů ... popisují změnu jednoho param.

působení na Hilbertově prostoru: (reprezentace grupy na $\mathcal{H}$)

... ke každé transformaci τ $\exists$ unitární operátor $U(\tau)$ na $\mathcal{H}$

... transformuje vektory a operátory

Podrobněji:

Prostoročasové transformace τ		Transformace na $\mathcal{H}$ $(U(\tau))$
Rotace (kolem osy x_α o úhel θ_α)	$\vec{x} \to \vec{x}' = R_\alpha(\theta_\alpha)\vec{x}$	$R_\alpha(\theta_\alpha) = e^{-i\theta_\alpha J_\alpha}$ $(\equiv e^{ik\theta})$
Translace	$x_\alpha \to x'_\alpha = x_\alpha + a_\alpha$	$U_\alpha(a_\alpha) = e^{-ia_\alpha P_\alpha}$
Boost	$x_\alpha \to x'_\alpha = x_\alpha + v_\alpha t$	$V_\alpha(v_\alpha) = e^{iv_\alpha G_\alpha}$
Posun v čase	$t \to t' = t + s$	$T(s) = e^{isH}$

pozn: znaménka se liší oproti Stone ... konvence zavedení generátorů $J_\alpha, P_\alpha, G_\alpha, H$

pozn: operátory ↗ nemusí komutovat, tj. např. $e^{-i\sum_\alpha \theta_\alpha J_\alpha} \neq \prod_\alpha e^{-i\theta_\alpha J_\alpha}$

pozn: zobecnění Stoneova teorému ... $U(\vec{s}) = \exp(i\vec{s}\cdot\vec{K}) \equiv \exp(i\sum_\alpha s_\alpha \hat{K}_\alpha)$

a) Komutační relace generátorů GG

pozn: konečné grupy lze zadat tabulkou grup. nás.

Liova grupa ... komutátory generátorů

Požadavek: operace symetrie mají stejnou strukturu pro $(\vec{x}, t)$ i na stavovém prostoru ($U(\tau)$ tvoří reprezentaci grupy)

pozn: reprezentace grupy na prostoru V ... zobrazení $v \to U(v)$ zachovávající grup. násobení

zde: pokud $\tau = \tau_2 \tau_1$ pak $U(\tau_2)U(\tau_1)|\psi\rangle$ a $U(\tau)|\psi\rangle$ představují stejný stav.

tj $\quad U(\tau_2\tau_1) = e^{i\omega(\tau_2,\tau_1)} U(\tau_2)U(\tau_1)$

problém: $e^{i(s_1 k_1 + s_2 k_2)} \neq e^{is_1 k_1} e^{is_2 k_2}$ ale $= e^{i \sum s_\alpha k_\alpha}$

strukturní konstanty Lie-ovy grupy:

$$e^{i\varepsilon K_\mu} e^{i\varepsilon K_\nu} e^{-i\varepsilon K_\mu} e^{-i\varepsilon K_\nu} =$$

$$(I + i\varepsilon K_\mu - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 K_\mu^2)(I + i\varepsilon K_\nu - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 K_\nu^2)(I - i\varepsilon K_\mu - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2 K_\mu^2)(I - i\varepsilon K_\nu - \tfrac{1}{2}\varepsilon K_\nu^2) + O(\varepsilon^3)$$

$$= I + i\varepsilon \underbrace{(K_\mu + K_\nu - K_\mu - K_\nu)}_{0} + \varepsilon^2 (\underbrace{-K_\mu^2 - K_\nu^2 + K_\mu^2 + K_\nu^2}_{0} - K_\mu K_\nu + K_\mu K_\nu + K_\nu K_\mu - K_\mu K_\nu)$$

$$= I + \varepsilon^2 [K_\nu, K_\mu] = e^{i\omega} U = I + i \sum_\lambda C^\lambda_{\mu\nu} K_\lambda \varepsilon^2 + i\omega_{\mu\nu} I$$

tj $\forall$ pár generátorů $\exists$ strukturní konstanty ~~tak~~ $C^\lambda_{\mu\nu}$ tak, že

$$\boxed{[K_\nu, K_\mu] = i \sum_\lambda C^\lambda_{\mu\nu} K_\lambda + i\omega_{\mu\nu} I}$$

... uzavřenost Liovy algebry generátorů

Úkol: najdi $C^\lambda_{\mu\nu}$ pro ~~pro~~ GG:

	H	P	G	J
H	0	0	1	0
P	0	0	0	4
G		0	0	3
J	0			2

komutující operace:

pokud $J_1 J_2 = J_2 J_1$ pak $[K_1, K_2] = 0$

→ posunutí$_1$ + posunutí$_2$ $[P_\alpha, P_\beta] = 0$

→ posunutí x + posunutí t $[P_\alpha, H] = 0$

→ posunutí t + ~~otoče~~ rotace $[H, J_\alpha] = 0$

→ posunutí + boost $[P_\alpha, G_\beta] = 0$

→ boost + boost $[G_\alpha, G_\beta] = 0$

Ad ① : $e^{i\varepsilon H} e^{i\varepsilon G_1} e^{-i\varepsilon H} e^{-i\varepsilon G_1} = I + \varepsilon^2 [G_1, H] = I + i\varepsilon^2 P_1 + O(\varepsilon^3)$

Jaké tomu odpovídají transformace:

$$(x_1, x_2, x_3, t) \xrightarrow{v_1(-\varepsilon)} (x_1 - \varepsilon t, x_2, x_3, t) \xrightarrow{\tau(-\varepsilon)} (x_1 - \varepsilon t, x_2, x_3, t - \varepsilon)$$

$$\xrightarrow{v_1(\varepsilon)} (x_1 - \varepsilon t + \varepsilon(t-\varepsilon), x_2, x_3, t - \varepsilon) \xrightarrow{\tau(+\varepsilon)} (x_1 - \varepsilon^2, x_2, x_3, t)$$ .. posunutí o $-\varepsilon^2$

tj

neboli $[G_\alpha, H] = i P_\alpha$ $(+\omega I\ ?)$ ... provedli jsme $1 \to \alpha$ (nezávisí na směru)

Ad ② Pár slov o rotacích: (vrátíme se v QM II)

rotace kolem x_1:
$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \overset{\theta \to 0}{\simeq} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\theta^2/2 & -\theta \\ 0 & \theta & 1-\frac{\theta^2}{2} \end{pmatrix} \simeq I - i\theta M_1 = e^{-i\theta M_1}$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$ generátor

podobně
$$R_2 = \begin{pmatrix} c & 0 & s \\ 0 & 1 & 0 \\ -s & 0 & c \end{pmatrix} \longrightarrow M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad R_2 = e^{-i\theta M_2}$$

$$R_3 = \begin{pmatrix} c & -s & 0 \\ s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow M_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad R_3 = e^{-i\theta M_3}$$

$$e^{-i\varepsilon J_2} e^{-i\varepsilon J_1} e^{i\varepsilon J_2} e^{i\varepsilon J_1} = I + \varepsilon^2 [J_1, J_2] \simeq ?\ I + i\varepsilon^2 J_3$$

$$(\vec{x}, t) \longrightarrow (R_2(\varepsilon) R_1(\varepsilon) R_2(-\varepsilon) R_1(-\varepsilon)\vec{x}, t) = [(I + \varepsilon^2 [M_1 M_2 - M_2 M_1])\vec{x}, t]$$

$$= \left[\left(I + \varepsilon^2 \left\{ \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&-i \\ 0&i&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&0&i \\ 0&0&0 \\ -i&0&0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0&0&i \\ 0&0&0 \\ -i&0&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&-i \\ 0&i&0 \end{pmatrix} \right\}\right)\vec{x}, t\right] \quad \dots \quad I + \varepsilon^2 \left\{ \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ -1&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0&-1&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left[\left(I + \varepsilon^2 \begin{pmatrix} 0&1&0 \\ -1&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}\right)\vec{x}, t\right] = [(I + i\varepsilon^2 M_3)\vec{x}, t] = [R_3(-\varepsilon^2)\vec{x}, t]$$

a te tomu odpovídá $e^{i\varepsilon^2 J_3}$

tj $[J_1, J_2] = i J_3$ $\xrightarrow{\text{cyklicky}}$ tj $[J_\alpha, J_\beta] = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} J_\gamma$ .. sum. konvence

Ad ③ $e^{i\varepsilon G_2} e^{i\varepsilon J_1} e^{-i\varepsilon G_2} e^{-i\varepsilon J_1} = I + \varepsilon^2 [J_1, G_2] \overset{?}{=} I + i\varepsilon^2 G_3$

$$(\vec{x}, t) \xrightarrow{R_1(\varepsilon)} (R_1(\varepsilon)\vec{x}, t) \xrightarrow{v_2(-\varepsilon)} (R_1(\varepsilon)\vec{x} - \varepsilon t \vec{e}_2, t) \xrightarrow{R_1(-\varepsilon)} (\underbrace{R_1(-\varepsilon) R_1(\varepsilon)}_{I}\vec{x} - \varepsilon t R_1(-\varepsilon)\vec{e}_2, t)$$

$$\xrightarrow{v_2(\varepsilon)} (\vec{x} - \varepsilon t R_1(-\varepsilon)\vec{e}_2 + \varepsilon t \vec{e}_2, t)$$

tj $\vec{x} \to \vec{x}\,' = \vec{x} - \varepsilon t (I + i\varepsilon M_1 - I)\vec{e}_2 = \vec{x} - i\varepsilon^2 M_1 \vec{e}_2 t$ $\qquad \begin{pmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&-i \\ 0&i&0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}$

$$= \vec{x} + \varepsilon^2 t \vec{e}_3 \ \dashrightarrow\ v_3(\varepsilon^2) = e^{i\varepsilon^2 G_3}$$

tj. $[J_1, G_2] = i G_3 \xrightarrow{\text{cykl.}} [J_\alpha, G_\beta] = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} G_\gamma$

Ad ④ … stejně jako 3 … $\varepsilon + \vec{e}_2 \to \varepsilon \vec{e}_2$ … $\to [J_\alpha, P_\beta] = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} P_\gamma$

Shrnutí:
(1) $[P_\alpha, P_\beta] = 0$ ✓ (4) $[G_\alpha, G_\beta] = 0$ ✓ (7) $[J_\alpha, J_\beta] = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} J_\gamma$ ✓
(2) $[P_\alpha, H] = 0$ ✓ (5) $[J_\alpha, H] = 0$ ✓ (8) $[J_\alpha, P_\beta] = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} P_\gamma$ ✓
(3) $[G_\alpha, P_\beta] = i\delta_{\alpha\beta} M I$ (zatím 0) (6) $[G_\alpha, H] = iP_\alpha$ ✓ (9) $[J_\alpha, G_\beta] = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} G_\gamma$ ✓

pozn: později uvidíme, že (1-4) a (6) musí nalézt H, (5) říká, že H je skalár
(7-9), že J, P, G jsou vektory

odstranění nejistot ve fázi … v každém ~~členu~~ [ ] ↑ musí být ~~fa~~ člen $i\omega_{\alpha\beta} I$

- diagonální člen $\alpha = \beta$ … v (1), (4) i (7) musí $\omega_{\alpha\alpha} = 0$
- použití Jacobiho identity

$$[[A,B],C] + [[B,C],A] + [[C,A],B] = 0 \qquad (JI)$$

DK: Prostě rozepsat … $4 \times 3 = 12$ členů … každá z $3! = 6$ permutací se vyskytuje dvakrát … pokaždé s opačným znaménkem

- v (JI) volba $A = J_2$, $B = P_3$, $C = H$
  $\to i[P_1, H] = [\omega I, J_2] + [? I, P_3] = 0$ … žádná fáze v (2)
- podob. $A, B, C = G_\alpha, H, P_\beta \to (1)$
- $A, B, C = J_1, G_2, G_2$ + cykl. $\to (4)$
- J_1, J_2, H + cykl. $\to (5)$
- fázová konvence: (7) … $[J_\alpha, J_\beta] = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} J_\gamma + i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} b_\gamma I$
  ω musí být antisym.. lze takto

substituce $J_\alpha \to J_\alpha - b_\alpha I$ … na levé str. nepřispívá
… na pravé zruší to
… ekvivalentní záměna: $R_\alpha = e^{-i\theta J_\alpha} \to R_\alpha \cdot e^{i\theta b}$ … fixuje fázi v definici R

- trochu víc práce: (9)
  .. Jacobi $(A,B,C) = (J_3, J_1, G_3) \to$ antisymetrie $[J_\alpha, G_\beta] = -[J_\beta, G_\alpha]$
  $(J_1, J_2, G_3) \to [J_\alpha, G_\alpha] = 0$
  $\to$ rovněž zde $[J_\alpha, G_\beta] = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} G_\gamma + i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} b_\gamma I$
  opět se zbavíme b_γ fixováním fáze u $\mathcal{V}_\alpha(v)$
- podobně: (8) .. jen $G \to P$
- Jacobi $(A,B,C) = (J_1, G_2, H) \to (6)$
- zbývá (3): $(A,B,C) = (J_1, G_2, P_1)$ … $i[G_3, P_1] = 0$ + cykl
  $(A,B,C) = (J_1, G_2, P_3)$ … $\Longrightarrow [P_2, G_2] = [P_3, G_3]$

$\Rightarrow [G_\alpha, P_\beta] = i\delta_{\alpha\beta} \cdot M \cdot I$ … $\delta_{\alpha\beta}$ kvůli ↑↑ ; M .. rozměr

b) Vztah k operátoru polohy

- operátor polohy: $\vec{Q} \equiv (\hat{Q}_1, \hat{Q}_2, \hat{Q}_3)$ $\left(\equiv (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)\right)$

  def: $\hat{Q}_\alpha |\vec{x}\rangle = x_\alpha |\vec{x}\rangle$

  ... přitom $|\vec{x}\rangle \equiv |x_1, x_2, x_3\rangle \equiv |x_1\rangle \otimes |x_2\rangle \otimes |x_3\rangle$

  .. např. $\hat{Q}_2$ působí jen na 2 složku $\hat{Q}_2 \equiv I \otimes \hat{q} \otimes I$

  $\Rightarrow [\hat{Q}_\alpha, \hat{Q}_\beta] = 0$

- vztah ke generátoru posunutí:

  při výkladu Stoneova teorému jsme si říkali, že posunutí:

  $\hat{U}(a)\psi(x) = \exp\{-iaK\}\psi(x)$ kde $K = -i\frac{d}{dx}$ ... tj $P = K = -i\frac{d}{dx}$

  v 3D: posunutí komutují ... tj $\hat{U}(\vec{a}) = U_1(a_1)U_2(a_2)U_3(a_3) = \exp(-i\vec{a}\cdot\vec{P})$

  $\vec{P} = -i\nabla_{\vec{x}}$ tj $P_\alpha = -i\frac{\partial}{\partial x_\alpha}$

- fundamentální komutační relace:

  ~~[illegible]~~ posunutí systému $|x'\rangle = |\vec{x}+\vec{a}\rangle = e^{-i\vec{a}\cdot\vec{P}}|\vec{x}\rangle$

  $\hat{Q}' = e^{-i\vec{a}\cdot\vec{P}}\hat{Q}\, e^{i\vec{a}\cdot\vec{P}}$ ... unit. transf. ... tj stejné spektrum:

  přitom $\hat{Q}'_\alpha |x'_\alpha\rangle = x_\alpha |x'_\alpha\rangle$ tj $\hat{Q}'_\alpha |x_\alpha + a_\alpha\rangle = x_\alpha |x_\alpha + a_\alpha\rangle = (Q_\alpha - aI)|x+a\rangle$

  (měření posun stavu, posun přístrojem)

  tj $\hat{\vec{Q}} - \vec{a}I = \hat{Q}' = e^{-i\vec{a}\vec{P}} Q\, e^{i\vec{a}\vec{P}} = (I - i\vec{a}\vec{P})\, Q\, (I + i\vec{a}\vec{P}) + O(a^2)$

  tj $[Q, \vec{a}\cdot\vec{P}] = i\vec{a}\, I$ tj $\boxed{[\hat{Q}_\alpha, \hat{P}_\beta] = i\delta_{\alpha\beta} I}$ (10)

  pozn: snadno ověříte, že x-reprez. $\vec{Q} = \vec{x}$; $\vec{P} = -i\nabla_x$ to splňuje

- komutační relace s generátorem rotací: $\boxed{[J_\alpha, Q_\beta] = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} Q_\gamma}$ (11)

  dá se odvodit stejně jako (20) z rotací,

  odvozena později ... souvisí s tím, že operátory Q_α tvoří vektor

- operátor rychlosti

  Požadujeme zachování klasického vztahu $\langle V\rangle = \frac{d}{dt}\langle Q\rangle$

  tj $\langle\psi(t)|\hat{V}|\psi(t)\rangle = \frac{d}{dt}\langle\psi(t)|Q|\psi(t)\rangle = \langle\frac{d}{dt}\psi(t)|Q|\psi(t)\rangle + \langle\psi|Q|\frac{d}{dt}\psi\rangle$

  $e^{is\hat{H}}|\psi(t)\rangle = |\psi(t+s)\rangle$ ... $\frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \longrightarrow |\frac{d}{dt}\psi(t)\rangle = -iH|\psi(t)\rangle$

  tj $\boxed{\hat{V}_\alpha = i[\hat{H}, \hat{Q}_\alpha]}$ (12)

- vztah ke generátoru boostu

$$e^{i\vec{v}_0\cdot\vec{G}}|\vec{v}\rangle = |\vec{v}+\vec{v}_0\rangle$$

.. podob. jako $P \leftrightarrow X$ ... $e^{i\vec{v}_0\cdot\vec{G}}\,\hat{V}\,e^{-i\vec{v}_0\vec{G}} = \hat{V} - v_0\hat{I}$ + rozvoj pro $v_0 \to 0$

$\longrightarrow$ $\boxed{[\hat{V}_\alpha,\hat{G}_\beta] = -i\delta_{\alpha\beta}\hat{I} \quad (13)}$ ← mimochodem dá se rovněž odvodit z $V = i[H,Q]$ a Jacobi identity + (10) a (14)

Platí se nezmění přechodem do pohyb. syst. → $\boxed{[\hat{G}_\alpha,\hat{Q}_\beta]=0 \quad (14)}$

c) "Řešení komut. relací" ... vztahy mezi nimi a Interpretace

matematická odbočka

Lemma (Schur):

Pokud operátor $[\hat{M},\hat{Q}_\alpha]=[\hat{M},\hat{P}_\alpha]=0$ pak $\hat{M}=c\hat{I}$ kde $c\in\mathbb{C}$

(operátory na L^2 ... bezspinová částice)

DK: 1D: $[M,Q]=0 \Rightarrow$ spol. báze vl. v. tj $\hat{M}=\int dx\, m(x)\,|x\rangle\langle x|$

tj $\hat{M}\psi(x) = m(x)\psi(x)$

současně $\frac{\partial}{\partial x}\hat{M}\psi(x) = i\hat{P}\hat{M}\psi(x) = i\hat{M}\hat{P}\psi(x) = m(x)\psi'(x)$

nebo $\hookrightarrow = \frac{\partial}{\partial x}\left(m(x)\psi(x)\right) = m(x)\psi'(x) + m'(x)\psi(x)$

... platí $\forall\psi(x) \Rightarrow m(x)=c$ tj $\hat{M}=c\int dx\,|x\rangle\langle x| = c\hat{I}$

3D: .. triviální zobecnění ... $\frac{d}{dx}\to P_x$

Aplikace:

① operátor $(\vec{G}-M\vec{Q})$ komutuje $\vec{Q}$ ... viz (14)

a komutuje s $\vec{P}$ ... viz (3) a (10)

$\to$ $G_\alpha = MQ_\alpha + c_\alpha I$ ale (9) splňuje jen s $c_\alpha=0$ — tj Q je až na škál. totož. s gen. boostu

závěr $\boxed{G_\alpha = MQ_\alpha}$

② $\hat{V}_\alpha = i[H,Q_\alpha] = i[H,G_\alpha]/M \underset{(6)}{=} P_\alpha/M$ tj $\boxed{P_\alpha = MV_\alpha}$ V zase gen. posunutí

pozn: zbavili jsme se Q,V ... resp. interpretovali jsme G,P jako oper. fyz. veličin. Jsou $\forall$ gen $H,P,G\equiv Q,J$ nezáv? V klas. mech jen P,Q; $J=J(P,Q)$, $H=H(P,Q)$

③ na násl. str. je ukázáno, že $J_\alpha \equiv \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}Q_\beta P_\gamma$ $(\equiv(\vec{Q}\times\vec{P})_\alpha)$

splňuje stejné rce jako J_α ... tj (7), (8), (9), (11) a (5)

speciálně ~~...~~ komut. s $\underset{(11)}{Q}$ a $\underset{(8)}{P}$ $\Rightarrow$ $\vec{J}_\alpha = \vec{Q}\times\vec{P} + \vec{c}\,I$, ale $c=0$ jinak nesplňuje (7)

tj $\boxed{J_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}Q_\beta P_\gamma}$ tj $\vec{J} = \vec{Q}\times\vec{P}$

pomocné výpočty:

def $J_\alpha \equiv \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} Q_\beta P_\gamma$ dá se DK:

- $(\tilde{7})$ $\underline{[J_{\alpha_1}, J_{\alpha_2}]} = \varepsilon_{\alpha_1\beta_1\gamma_1}\varepsilon_{\alpha_2\beta_2\gamma_2}[Q_{\beta_1}P_{\gamma_1}, Q_{\beta_2}P_{\gamma_2}]$

(~~na předn.~~) cvičení

$$= \varepsilon \quad \varepsilon \quad \{Q_{\beta_1}\underbrace{[P_{\gamma_1}, Q_{\beta_2}]}_{-i\delta_{\gamma_1\beta_2}}P_{\gamma_2} + Q_{\beta_2}\underbrace{[Q_{\beta_1}, P_{\gamma_2}]}_{i\delta_{\beta_1\gamma_2}}P_{\gamma_1}\}$$

(6) →

přeznačení sčít ind: Q_α, P_β

$$= i(\varepsilon_{\gamma\alpha_1\alpha}\varepsilon_{\gamma\alpha_2\beta} + \varepsilon_{\gamma\beta\alpha_1}\varepsilon_{\gamma\alpha_2\alpha})Q_\alpha P_\beta$$

$$\cancel{\delta_{\alpha_1\alpha_2}\delta_{\alpha\beta}} - \delta_{\alpha_1\beta}\delta_{\alpha\alpha_2} + \delta_{\beta\alpha_2}\delta_{\alpha_1\alpha} - \cancel{\delta_{\beta\alpha}\delta_{\alpha_1\alpha_2}}$$

užití relace

$$\varepsilon_{\gamma\alpha_1\alpha_2}\varepsilon_{\gamma\beta_1\beta_2} = \delta_{\alpha_1\beta_1}\delta_{\alpha_2\beta_2} - \delta_{\alpha_1\beta_2}\delta_{\alpha_2\beta_1}$$

$$= i\{\delta_{\alpha_1\alpha}\delta_{\alpha_2\beta} - \delta_{\alpha_1\beta}\delta_{\alpha_2\alpha}\}Q_\alpha P_\beta = i\varepsilon_{\alpha_1\alpha_2\gamma}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}Q_\alpha P_\beta = \underline{i\varepsilon_{\alpha_1\alpha_2\gamma}J_\gamma}$$

podobně:

- $(\tilde{8})$ $\underline{[J_\alpha, P_\beta]} = \varepsilon_{\alpha\gamma_1\gamma_2}[Q_{\gamma_1}P_{\gamma_2}, P_\beta] = \varepsilon_{\alpha\gamma_1\gamma_2}\underbrace{[Q_{\gamma_1}, P_\beta]}_{i\delta_{\gamma_1\beta}}P_{\gamma_2}$

(na předn.)

$$\underline{= i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}P_\gamma}$$

- $(\tilde{9})$ $[J_\alpha, G_\beta] = \varepsilon_{\alpha\gamma_1\gamma_2}[Q_{\gamma_1}P_{\gamma_2}, G_\beta] = \varepsilon_{\alpha\gamma_1\gamma_2}Q_{\gamma_1}[P_{\gamma_2}, G_\beta]$

(cvičení)

$$= -i\varepsilon_{\alpha\gamma_1\gamma_2}Q_{\gamma_1}\delta_{\gamma_2\beta}M = \underline{i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}Q_\gamma}$$

- $(\tilde{11})$ $[J_\alpha, Q_\beta] = \varepsilon_{\alpha\gamma_1\gamma_2}[Q_{\gamma_1}P_{\gamma_2}, Q_\beta] = \varepsilon_{\alpha\gamma_1\gamma_2}Q_{\gamma_1}[P_{\gamma_2}, Q_\beta]$

(na předn.)

$$= -i\varepsilon_{\alpha\gamma_1\gamma_2}Q_{\gamma_1}\delta_{\gamma_2\beta} = \underline{i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}Q_\gamma}$$

- $(\tilde{5})$ $[J_\alpha, H] = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}[Q_\beta P_\gamma, H] = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma}\{Q_\beta\underbrace{[P_\gamma, H]}_{0} + \underbrace{[Q_\beta, H]}_{(+i)\ i[H,Q] = iV}P_\gamma\}$

(cvičení)

$$= i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}V_\beta P_\gamma = i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}MV_\beta V_\gamma \underline{= 0}$$

---

4 dá se určit H?

ze (2) se zdá že H = funkce P ... (6) znamená $[Q_\alpha, H] = \frac{i}{M}P_\alpha$

splňuje $\frac{1}{2M}P_\beta P_\beta$:
$$[Q_\alpha, \tfrac{1}{2M}P_\beta P_\beta] = \tfrac{1}{2M}P_\beta[Q_\alpha, P_\beta] + \tfrac{1}{2M}[Q_\alpha, P_\beta]P_\beta = \frac{i}{M}P_\alpha \checkmark$$

tj $\boxed{\hat{H} = \frac{1}{2M}\hat{P}_\alpha\hat{P}_\alpha} + E_0 I$ ... libovolná volba počátku energie

.. nebo též fázová konvence v čas. posunutí.

.. lze volit $E_0 = 0$

Nyní se můžeme vrátit k def V:

(12) → $V_\alpha = i[\hat{H}, \hat{Q}] = i[\frac{P_\beta P_\beta}{2M}, Q_\alpha] = P_\alpha / M$ ... tj $\boxed{P_\alpha = MV_\alpha}$ konzist. s výše

<u>Závěr:</u> relace (a) $P_\alpha = M V_\alpha$

(b) $\hat{H}_\alpha = \frac{1}{2} M V_\alpha V_\alpha + E_0$

(c) $J_\alpha = M \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} Q_\beta V_\gamma$

vypadají jako klasické vyjádření hybnosti, energie a mom. hybnosti

... až na rozměr → zatím .. správný rozměr $[Q] = m$; $[\hat{V}] = m s^{-1}$

M .. nemá správný rozměr $[M] = [\hat{G}, \hat{P}] = s m^{-1} \cdot m^{-1}$

→ budeme požadovat, aby fyzik. konstanta $m = \hbar M$, kde $\hbar$ je universální konstanta s rozměrem $kg \cdot m^2 \cdot s^{-1}$ .. parametr teorie, který je třeba určit měřením

pozn: rozměr $[\hbar] = [p] \cdot [x]$ nebo $[E] \cdot [t]$
a fyz. veličin např Akce $S \equiv \int L(q, \dot{q}, t) dt$ má rozměr $[E] \cdot [t]$
a moment hybnosti $[\vec{j}] = [p] \cdot [x]$

pozn: $Q \equiv \hat{x}$, $\hat{V} \equiv \hat{v}$

→ nyní $[P] = m^{-1}$ → $\hbar P_\alpha \equiv p_\alpha$ má rozměr hybnosti

$[H] = t^{-1}$ → $\hbar H \equiv h$ má rozměr energie

$[J] = 1$ → $\hbar J_\alpha \equiv j_\alpha$ má rozměr momentu hybnosti

<u>SHRNUTÍ:</u> <u>Volná částice:</u> (a opravy na rozměr)

stavový prostor $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3)$ ... $\psi(\vec{x})$

důležité pozorovatelné: <u>poloha</u> $\boxed{\hat{Q}_\alpha \psi(\vec{x}) = x_\alpha \psi(\vec{x})}$ $(\hat{Q}_\alpha \equiv \hat{x}_\alpha)$

<u>hybnost</u> $\boxed{\vec{p} = \hbar \vec{P} \left(= -i\hbar \vec{\nabla}_x \psi(\vec{x})\right)}$

<u>energie</u> $h = \hbar H = \hbar \frac{P^2}{2M} = \hbar \frac{(p/\hbar)^2}{2m\hbar} = \boxed{\frac{p^2}{2m} = \hat{h}}$ $(\equiv H)$

<u>moment hybnosti</u> $\boxed{\vec{j} = \vec{Q} \times \vec{p}}$

<u>DŮLEŽITÉ RELACE:</u>

Galilei grupa: $\hat{\tau} = \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \left(\theta_\alpha j_\alpha - a_\alpha p_\alpha + v_\alpha Q_\alpha m + t \hat{h} \right) \right\}$

speciálně časový vývoj: $\boxed{i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{h} |\psi(t)\rangle}$ Schrödingerova rovnice

komutační relace: • $[\hat{Q}_\alpha, \hat{p}_\beta] = i\hbar \delta_{\alpha\beta}$

• $[\hat{j}_\alpha, \hat{A}_\beta] = i\hbar \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} A_\gamma$ ∀ vektor. veličinu např: $A = \vec{j}, \vec{P}, \vec{Q}, \vec{V}$

oper. rychlosti : $\hat{V}_\alpha = i [\hat{h}, \hat{Q}_\alpha] / \hbar$

částice interagující s polem (vnějším)

analogie s klasickou fyzikou: operace translace, rotace, boost modifikují stav → souřadnice ve fázovém prostoru

Interakce mění jen vztah k budoucímu stavu

tj. generátor posunutí v čase H se změní, ale stále je generátorem,

tj. $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{h} |\psi(t)\rangle$ ... tj. stále $[\hat{Q}_\alpha, \hat{h}] = i\hbar \hat{V}_\alpha$ ... (12)

nejobecnější tvar $\hat{h}$:

všechny komut. relace (1)–(14) platí, kromě (2), (5), (6)

např. (2) odvozena z toho, že nezáleží jestli se nejdříve posuneme v čase a pak v prostoru nebo naopak – to interakce narušuje ... vztah k budoucnosti může být různý na různých místech

srovn strana QM 6 6: jak čekáme ... gener. boostu nezměněn

① pro odvození $G_\alpha = M Q_\alpha$ $\left(\frac{m}{\hbar}\right)$ jsme použili (14), (3), (10) a (9) ... stále platí

② pro odvození $V_\alpha = P_\alpha / M$ jsme použili (6) .. neplatí; modifikace:

$(13) \rightarrow [V_\alpha, G_\beta] = -i\delta_{\alpha\beta} I = M[V_\alpha, Q_\beta]$ tj. $[V_\alpha, Q_\beta] = -\frac{i\hbar}{m} \cdot \delta_{\alpha\beta}$

$\Rightarrow [(V_\alpha - p_\alpha/m), Q_\beta] = 0$, tj. $V_\alpha - p_\alpha/m = -A_\alpha(\vec{Q})$ (/m ← bůno)

neboli: $\boxed{V_\alpha = \left[p_\alpha - A_\alpha(Q_1, Q_2, Q_3)\right]/m}$ ... A ≡ libovol. fce Q (vektorový potenciál)

③ ... moment hybn. jsme odvodili z (8) a (11) .. beze změn $\vec{J} = \vec{Q} \times \vec{P}$

④ hamiltonián: (12) ... $[\hat{Q}_\alpha, \hat{h}] = i\hbar \hat{V}_\alpha$ splňuje pro

$$h_0 = \frac{(P_\alpha - A_\alpha)(P_\alpha - A_\alpha)}{2m}$$

Dk: $\frac{1}{2m}[Q_\alpha, (P_\beta - A_\beta)(P_\beta - A_\beta)] = \frac{1}{2m}\left\{\underbrace{[Q, P-A]}_{i\hbar\delta_{\alpha\beta}}(P-A) + (P-A)[Q, P-A]\right\}$

$= \frac{i\hbar}{2m} 2 \cdot (P_\alpha - A_\alpha) = i\hbar V_\alpha$

tj. $[\hat{Q}_\alpha, h - h_0] = 0 \rightarrow$ $\boxed{\hat{h} = \frac{(\hat{P}_\alpha - \hat{A}_\alpha)(\hat{P}_\alpha - \hat{A}_\alpha)}{2m} + W(\hat{Q})}$

interpretace: W .. ~~elektrický~~ skalární potenciál; A .. vektorový potenciál ELMG pole (nebo gravitační potenc. - Newton)

pozn: dokázali jsme, že ↑ je nejobecnější tvar vyhovující našim požadavkům na působení Galileiho grupy na vl. v. Q a V.

Pozn: dá se zobecnit na částici se spinem $\mathcal{H} = \cancel{\mathcal{H}} L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathcal{H}_{spin}$

Schur lemma $\to$ konstanta c může být operátor v $\mathcal{H}_{spin}$

.. viz. Ballentine

zde: později prostě postulujeme měřit. veličiny pro č. se spinem.