

Cvičení 10: Vázané stavy ve 3D - sférická symetrie.

Úloha 1: Sférická potenciálová jáma

Najděte podmínku pro to, aby ve sférické potenciálové jámě hloubky V_0 a poloměru a existovaly, 1, 2, 3 vázané s-stavy. Jaká musí být hloubka jámy pro existenci vázaného p-stavu. Jak vypadají vlnové funkce a energie vázaných s- a p-stavů pro jámu nekonečné hloubky?

Nápověda:

$$\begin{aligned} Y_{00} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi}} & j_0(z) &= \frac{\sin z}{z} \\ Y_{1\pm 1} &= \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \frac{x \pm iy}{r} & j_1(z) &= \frac{\sin z}{z^2} - \frac{\cos z}{z} \\ Y_{10} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \frac{z}{r} & j_2(z) &= \left(\frac{3}{z^3} - \frac{1}{z}\right) \sin z - \frac{3}{z^2} \cos z \\ Y_{2\pm 2} &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \frac{(x \pm iy)^2}{r^2} & n_0(z) &= -\frac{\cos z}{z} \\ Y_{2\pm 1} &= \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \frac{z(x \pm iy)}{r^2} & n_1(z) &= -\frac{\cos z}{z^2} - \frac{\sin z}{z} \\ Y_{20} &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{r^2} & n_2(z) &= -\left(\frac{3}{z^3} - \frac{1}{z}\right) \cos z - \frac{3}{z^2} \sin z \end{aligned}$$

Úloha 2: Rozpad atomu tritia

Jádro atomu tritia se přemění β -rozpadem na jádro hélia. Předpokládejte, že rozpad proběhl velmi rychle, takže vlnová funkce elektronu se nezměnila. S jakou pravděpodobností bude ion po rozpadu v základním stavu? S jakou pravděpodobností jej nalezneme v prvním excitovaném stavu?

Úloha 3: Atom vodíku

Jaká je pravděpodobnost nalézt elektron v atomu vodíku (v základním stavu) dále od protonu, než kolik povoluje klasická fyzika?

Nápověda:

$$\text{Pro } V(x) = \gamma/r, \quad E_n = -\frac{m\gamma^2}{2\hbar^2 n^2}, \quad a = \frac{\hbar^2}{m|\gamma|}$$

$$R_{10}(r) = 2\sqrt{\frac{1}{a^3}} \exp(-r/a), \quad R_{20}(r) = \sqrt{\frac{1}{2a^3}} (1-r/2a) \exp(-r/2a), \quad R_{21}(r) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{6a^3}} r/a \exp(-r/2a).$$

Úloha 4: Vytvářející funkce Laguerrových polynomů

$$S(t, x) = \frac{1}{(1-t)^{a+1}} \exp\left(-\frac{xt}{1-t}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^a(x) t^n$$

Dokažte, že ($a > 0$):

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x^a e^{-x} L_m^a(x) L_n^a(x) dx &= \delta_{mn} \frac{\Gamma(a+n+1)}{n!}, \\ \int_0^{\infty} x^{a+1} e^{-x} [L_n^a(x)]^2 dx &= \frac{\Gamma(a+n+1)\Gamma(2n+a+1)}{n!}, \\ \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} [L_n^a(x)]^2 dx &= \sum_{m=0}^n \frac{\Gamma(a+m)}{m!}. \end{aligned}$$