Úloha 3: Kvantový řetízek.

Termín odevzdání: 18. listopadu

Na cvičení jsme pracovali s nekonečně dlouhým řetízkem kvantových teček. Stavovým prostorem částice v takovém systému je $\mathcal{H} = l^2$, s ortonormální bází $\{|n\rangle, n \in \mathcal{Z}\}$. Hamiltonián můžeme napsat ve tvaru

$$\hat{H} = \hbar\omega \sum_n |n\rangle\langle n| - \hbar\beta \sum_n \{|n\rangle\langle n+1| + |n+1\rangle\langle n|\},$$

kde ω a $\beta > 0$ jsou reálné konstanty. Dále uvažujte operátor polohy částice v řetízku:

$$\hat{Q} = \sum_n n|n\rangle\langle n|.$$

1. V tomto systému můžeme definovat operátor rychlosti částice $\hat{V} = i[\hat{H}, \hat{Q}]/\hbar$. Najděte tento operátor. (2 body)
2. Dokažte použitím časové Schrödingerovy rovnice, že časová derivace střední hodnoty operátoru $\hat{Q}$ je rovna střední hodnotě operátoru $\hat{V}$, tj. $\partial_t\langle\psi(t)|\hat{Q}|\psi(t)\rangle = \langle\psi(t)|\hat{V}|\psi(t)\rangle$. (1bod)
3. Najděte spektrum operátoru $\hat{V}$. (2body)
4. Najděte úplnou množinu vlastních vektorů tohoto operátoru a správně je normalizujte. (2body)
5. Jde o spektrum spojité či diskrétní? Jsou vlastní hodnoty degenerované? Napište relaci úplnosti - stačí jen napsat, bez ověřování (2body)
6. Systém byl připraven ve stavu $|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle$. Pro jaké hodnoty a, b nabývá střední hodnota rychlosti největší hodnoty? (1bod)

Nápověda: Podobně jako na cvičení hledejte vlastní vektory ve tvaru

$$|\psi\rangle \equiv \sum_n \psi_n|n\rangle = \sum_n e^{ikn}|n\rangle.$$

Uvažujte jen vlastní vektory, které jsou dané omezenými funkcemi ψ_n pro $n \to \pm\infty$.