Zápočtová písemka z kvantové mechaniky I

čas na řešení: 90min

Úloha 1(10 bodů)
Uvažujme bezstrukturní částici ve dvou dimenzích s operátorem polohy $\vec{r} = (\hat{x}, \hat{y})$, operátorem hybnosti $\vec{p} = (\hat{p}_x, \hat{p}_y) = -i\hbar(\partial_x, \partial_y)$ a momentu hybnosti $\hat{L} = \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x$. Najděte komutátory $[\hat{x}, \hat{L}]$, $[\hat{p}_y, \hat{L}]$ a $[\hat{r}^2, \hat{L}]$.

Úloha 2(10 bodů)
Předpokládejte, že stavový prostor částice v kvantové 6-tečce je lineárním obalem ortonormální báze $\{|n\rangle, n = 1, ..., 6\}$. Na tomto prostoru definujeme operátory

$$\hat{C} = \sum_{n=1}^{6} |n+1\rangle\langle n|, \qquad \hat{H} = -t\sum_{n=1}^{6} \left(|n+1\rangle\langle n| + |n\rangle\langle n+1|\right),$$

přičemž používáme konvenci ($|n+6\rangle = |n\rangle$, tj. např. $|7\rangle = |1\rangle$). Ukažte, že $\hat{C}$ je unitární (3 body). Dále najděte čísla α a β tak, aby operátor $\hat{P} = \alpha\hat{I} + \beta\hat{C}^3$ byl projekčním operátorem (3 body). Ukažte, že $[\hat{H}, \hat{C}] = 0$ a najděte reálnou funkci $f(x)$ takovou, aby $\hat{H} = f(\hat{C})$ (4 body).

Úloha 3(10 bodů)
Na stavovém prostoru kvantového lineárního harmonického oscilátoru uvažujme následující operátor $\hat{U} = [\hat{I} + \hat{a}^\dagger - \hat{a}]^{-1}[\hat{I} - \hat{a}^\dagger + \hat{a}]$, kde $\hat{a}$ je anihilační operátor. Dokažte, že $\hat{U}$ je unitární (3 body). Nalezněte střední hodnotu hybnosti (3 body) a polohy (4 body) ve stavu daném vektorem $|\psi\rangle = \hat{U}(|0\rangle + |1\rangle)$, kde $|0\rangle$ a $|1\rangle = \hat{a}^\dagger|0\rangle$ je základní a první excitovaný stav.
Nápověda: najděte $(\hat{I} + \hat{a}^\dagger - \hat{a})|0\rangle$.

Úloha 4(10 bodů)
Bezstrukturní částice s hmotností m je zachycena v potenciálové jámě aproximované $\delta-$potenciálem $V(x) = -\lambda\delta(x)$, kde $\lambda > 0$ je konstanta. Hloubka jámy se najednou zvětší na dvojnásobek. Jaká je pravděpodobnost, že částice uteče z jámy pryč?

Úloha 5(10 bodů)
Bezstrukturní částice nacházející se v trojrozměrné potenciálové jámě je připravena ve stavu popsaném vlnovou funkcí

$$\psi(x, y, z) = (x + y + z)^2 e^{-\lambda r},$$

kde $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ a $\lambda > 0$ je konstanta. Jaké hodnoty kvadrátu momentu hybnosti můžeme naměřit a s jakou pravděpodobností (5 bodů)? Předpokládejme, že jsme naměřili nejnižší z těchto hodnot. Jaká bude (po tomto měření) pravděpodobnost, že částice je nejvýše ve vzdálenosti $(2\lambda)^{-1}$ od počátku (5 bodů)?

Mohou se hodit:

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}\mathrm{d}x = n!, \qquad \int_0^1 x^n e^{-x}\mathrm{d}x = n! - \frac{a_n}{e},$$

kde $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 5$, $a_3 = 16$, $a_4 = 65$, $a_5 = 326$, $a_6 = 1957$, $a_7 = 13700$.