

Zápočtová písemka z kvantové mechaniky I

čas na řešení: 90min

Úloha 1(10 bodů)

Ve stavovém prostoru lineárního harmonického oscilátoru je definován operátor $\hat{U} = e^{\alpha(\hat{a}-\hat{a}^\dagger)}$, kde \hat{a} je anihilační operátor a $\alpha > 0$ konstanta. Ukažte, že tento operátor je unitární. Pomocí základního stavu oscilátoru $|0\rangle$ definujeme stav $|\psi\rangle = \hat{U}|0\rangle$. Jaká je střední hodnota polohy v tomto stavu?

Úloha 2(10 bodů)

Předpokládejte, že stavový prostor částice v kvantové 4-tečce je lineárním obalem ortonormální báze $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle, |4\rangle\}$. Dále předpokládejme, že hamiltonián takové částice je

$$\hat{H} = \epsilon \sum_{m=1}^4 |m\rangle\langle m| - t \sum_{n=1}^4 \sum_{m \neq n} |m\rangle\langle n|.$$

Ze symetrie uhadneme, že vektor $|\psi\rangle = |1\rangle + |2\rangle + |3\rangle + |4\rangle$ je vlastním vektorem hamiltoniánu. Ověřte! Napište projekční operátor \hat{P}_0 na tento stav a projektor \hat{P}_1 na jeho ortogonální doplněk. Ukažte, že \hat{H} lze vyjádřit jako lineární kombinaci \hat{P}_0 a \hat{P}_1 . Nalezněte vlastní čísla a vlastní vektory \hat{H} .

Úloha 3(10 bodů)

Mějme dvě částice se spinem $1/2$ připravené ve stavu $|\psi\rangle = |++\rangle$ v němž má každá z nich projekci spinového momentu hybnosti na osu z rovnu $+\hbar/2$. Uvažujme operátor \hat{S}_e , který udává projekci vektoru celkového spinového momentu obou částic $\vec{S} = \vec{s}^{(1)} + \vec{s}^{(2)}$ do směru $\vec{e} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$. Jaká je pravděpodobnost, že měřením veličiny S_e nalezneme hodnotu 0 a jaký bude stav po měření?

Úloha 4(10 bodů)

Částice se nachází ve sférické, nekonečně hluboké, potenciálové jámě o poloměru a a její stav je popsán vlnovou funkcí

$$\psi(\vec{r}) = (x + y)^2 \sin\left(\frac{\pi}{a}r\right).$$

Jaké hodnoty kvadrátu momentu hybnosti \hat{L}^2 můžeme naměřit v tomto stavu a s jakou pravděpodobností? Jaká bude vlnová funkce pokud naměříme nejmenší z těchto hodnot?

Úloha 5(10 bodů)

Bezstrukturní částice s hmotností m je zachycena ve vázaném stavu v potenciálu, který je aproximován jednorozměrnou delta-jámou $V(x) = -\lambda\delta(x)$. Jaká je hustota pravděpodobnosti naměření hybnosti p v tomto stavu? Jaká je pravděpodobnost, že v tomto stavu naměříme hybnost $p > \frac{\lambda m}{\hbar}$?

Mohou se hodit:

$$\int_1^\infty \frac{1}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}, \quad \int_1^\infty \frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}, \quad \int_1^\infty \frac{1}{(1+x^2)^3} = \frac{3\pi}{32} - \frac{1}{4},$$
$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2} = \pi, \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{2}, \quad \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(1+x^2)^3} = \frac{3\pi}{8}.$$