

Zápočtová písemka z kvantové teorie II

čas na řešení cca 120min

Úloha 1(10 bodů)

Částice v kvantové trojtečce má hamiltonián

$$\hat{h} = -\beta (|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 3| + |3\rangle\langle 1|) + \text{h. c.} = -\beta \sum_{m \neq n} |m\rangle\langle n|,$$

kde h. c. znamená hermitovsky sdružený předchozí člen. Uvažujte takovou trojtečku zaplněnou dvěma navzájem neinteragujícími elektrony (tj. nerozlišitelné částice se spinem $1/2$). Najděte energie a stupeň degenerace stacionárních stavů. Dále najděte vlnovou funkci stavu s největší energií a z-složkou celkového spinu rovnou $1\hbar$. Jaká je v tomto stavu pravděpodobnost, že některý z elektronů je v teče $|1\rangle$ a současně ten druhý v teče $|2\rangle$.

Úloha 2(10 bodů)

V systému z úlohy 1 napište hamiltonián \hat{h} (respektive jeho rozšíření jako jednočásticový operátor na Fockův prostor) ve formalismu II. kvantování. Dále napište v tomto formalismu posunovací operátor $\hat{s}_- = \hat{s}_x - i\hat{s}_y$ pro celkový spin. Pomocí těchto výrazů a kanonických komutačních relací ukažte, že tyto operátory komutují.

Úloha 3(10 bodů)

Elektron v atomu vodíku je připraven ve stavu s energií odpovídající 2. excitovanému stavu ($n = 3$) a s celkovým (orbitálním + spinovým) momentem hybnosti $J = \frac{3}{2}$ a jeho projekcí $M = \frac{3}{2}$. Zjistěte jaké stavy odpovídají tomuto popisu. Předpokládejte, že všechny jsou stejně pravděpodobné a najděte redukovanou matici hustoty

$$\hat{\rho} = \frac{1}{2}[\hat{I} + \vec{p} \cdot \vec{\sigma}]$$

pro samotný spin elektronu v tomto stavu. Jaký je polarizační vektor \vec{p} tohoto stavu. Jedná se o čistý nebo smíšený stav?

Úloha 4(10 bodů)

V atomu vodíku uvažujte poruchu ve tvaru Hénonova-Heilesova potenciálu

$$V(x, y, z) = \lambda \left(\frac{1}{3}y^3 - yx^2 \right).$$

Kterou nejnižší hladinu v atomu vodíku ovlivní tato porucha v 1. řádu poruchové teorie? Jak velká je matice, kterou bychom měli diagonalizovat a kolik maticových elementů je skutečně nenulových a které z nich budete muset opravdu počítat integrací? Nápověda: použijte Gauntovu formuli nebo Wignerovu-Eckartovu větu a případně ještě paritu.