

## Cvičení 8: Nerozlišitelné částice reloaded.

*Motivace:* Výpočty různých vlastností v systémech několika nerozlišitelných částic.

### Částice na kroužku

Stavový prostor částice tvoří periodické, kvadraticky integrovatelné funkce na intervalu  $\phi \in \langle 0, 2\pi \rangle$ . Předpokládejme, že hamiltonián tohoto systému je

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu R} \frac{d^2}{d\phi^2}.$$

1. Najděte stacionární stavy částice a příslušné energie.
2. Nyní uvažujte dvě takové navzájem neinteragující částice a opět najděte vlastní stavy a energie v případě, že jsou to nerozlišitelné bosony.
3. Jako předchozí úloha, ale pro fermiony. V obou případech diskutujte první tři energetické hladiny a jejich degeneraci.
4. Ve stacionární poruchové teorii započítejte kontaktní interakci obou částic  $U(\phi_1, \phi_2) = \lambda\delta(\phi_1 - \phi_2)$  a to jak v případě bosonů, tak pro fermiony.

*Poznámka:* Tento systém lze též interpretovat jako rotor s jedním stupněm volnosti, nebo částice v jámě kvantované pomocí periodické okrajové podmínky (Born-vonKarman).

### Rozložení částic v nekonečně hluboké jámě

Uvažujte systém složený ze dvou neinteragujících částic v nekonečně hluboké pravoúhlé potenciálové jámě délky  $\pi$  v jedné dimenzi (tj.  $V(x) = 0$  pro  $x \in \langle 0, \pi \rangle$ , jinak  $V(x) = \infty$ ). Najděte střední kvadratickou vzdálenost  $\sqrt{\langle \psi | [\hat{x}^{(1)} - \hat{x}^{(2)}]^2 | \psi \rangle}$  částic v základním  $|\psi_0\rangle$  a v prvním excitovaném stavu  $|\psi_1\rangle$  pro

1. rozlišitelné, ale jinak identické částice,
2. nerozlišitelné bosony se spinem 0,
3. nerozlišitelné fermiony se spinem 1/2 v tripletním stavu.

Porovnejte výsledné hodnoty s rozptylem souřadnice  $\sqrt{\langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle}$  v jednočásticových stavech.