Zápočtová písemka z kvantové mechaniky II

čas na řešení: 90min

Úloha 1(10 bodů)
Mějme dvourozměrný kvantový lineární harmonický oscilátor s hamiltoniánem

$$\hat{H} = \tfrac{1}{2}\hbar\omega(\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{x}^2 + \hat{y}^2).$$

V prvním řádu poruchové teorie spočtěte jak se poruchou λxy rozštěpí druhá hladina.

Úloha 2(10 bodů)
Molekula s kvadrupólovým momentem v nehomogenním elektrickém poli je popsána jako 3D rotor s hamiltoniánem

$$\hat{H} = \tfrac{1}{2I}\hat{L}^2 + \gamma\cos^2\theta$$

na prostoru kvadraticky integrovatelných funkcí na jednotkové sféře. $\hat{L}^2$ je operátor kvadrátu orbitálního momentu hybnosti a θ a ϕ jsou sférické souřadnice. Najděte odhad energie základního stavu tohoto systému pomocí variačního principu. Předpokládejte, že vlnová funkce je lineární kombinací sférických harmonik $Y_{00}(\theta,\phi)$, $Y_{10}(\theta,\phi)$ a $Y_{20}(\theta,\phi)$. Pro nalezení hodnoty energie vezměte $\gamma = -21\hbar^2/4I$.

Úloha 3(10 bodů)
Uvažujme Hilbertův prostor lineárního harmonického oscilátoru se standardně definovanými posunovacími operátory $\hat{a}$ a $\hat{a}^\dagger$. Najděte operátor

$$\hat{A} = e^{\alpha(\hat{a}-\hat{a}^\dagger)}\hat{a}e^{\alpha(\hat{a}^\dagger-\hat{a})},$$

kde α je reálná konstanta a zdůvodněte výsledek pomocí operace traslace na hilbertově prostoru.

Úloha 4(10 bodů)
Systém dvou (rozlišitelných) částic se spinem 1 je popsán hamiltoniánem

$$\hat{H} = B(S_z^{(1)} + S_z^{(2)}) + \frac{A}{\hbar}\vec{S}^{(1)}\cdot\vec{S}^{(2)},$$

kde $\vec{S}^{(i)}$ a $S_z^{(i)}$ je operátor spinového momentu hybnosti částice i a jeho z-tová složka. Systém připravíme v čase $t=0$ ve stavu $|00\rangle$, kde obě částice mají nulovou z-složku spinu. Jaká je pravděpodobnost, že v čáse $t>0$ nalezneme u první částice projekci spinu $S_z^{(1)} = \hbar$.

Úloha 5(10 bodů)
Uvažujte kvantovou trojtečku. Hilbertův prostor stavů pro jednu částici v trojtečce tedy obsahuje tři vektory $|0\rangle$, $|1\rangle$, $|2\rangle$ a jejich lineární kombinace. Nechť hamiltonián částice v trojtečce je

$$\hat{h}_0 = -t\sum_n \left(|n\rangle\langle n{+}1| + |n{+}1\rangle\langle n|\right),$$

kde suma probíhá přes všechny stavy v trojtečce a ztotožňujeme $|3\rangle \equiv |0\rangle$. Nyní budeme do tečky přidávat další částice, bosony, nerozlišitelné od první částice. Hamiltonián bude dán prostou sumou $\hat{H}_0 = \sum_i \hat{h}_0^{(i)}$, kde $\hat{h}_0^{(i)}$ je kopie $\hat{h}_0$ působící na i-tou částici. Dále předpokládejme, že první dvě částice interagují prostřednictvím interakčního členu v hamiltoniánu (energie vzroste o U pokud se obě částice nacházejí ve stejné tečce)

$$\hat{V}^{(12)} = U\sum_n |nn\rangle\langle nn|,$$

kde $|mn\rangle$ je stav s první částicí v tečce m a druhou částicí v tečce n a U je konstanta. V případě více částic bude interakce $\hat{V}$ standardně dána stejným členem vysčítaným přes všechny dvojice částic.

- Najděte výraz pro $\hat{H}_0 + \hat{V}$ ve formalizmu 2. kvantování.
- Najděte stacionární stavy a příslušné energie v případě, že trojtečka obsahuje jedinou částici.
- Najděte stacionární stavy a příslušné energie v případě, že trojtečka obsahuje dvě částice.