

Cvičení 8: Nerozlišitelné částice.

Motivace: Symetrizační postulát a jeho důsledky.

Úloha 1: Dvě částice v jámě interagující spinem

Dva identické nerozlišitelné bosony se spinem 1 jsou zachyceny v potenciálové jámě popsané harmonickým potenciálem s vlastní úhlovou frekvencí ω a jejich vzájemná interakce je dána skalárním součinem jejich spinů. Uvažujme tedy hamiltonián systému ve tvaru

$$\hat{H} = \hat{h}^{(1)} + \hat{h}^{(2)} + \frac{\lambda}{\hbar} \vec{s}^{(1)} \cdot \vec{s}^{(2)},$$

kde $\hat{h}^{(1)} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + \frac{1}{2})$ je hamiltonián pro částici 1 v harmonickém potenciálu a stejný tvar má i $\hat{h}^{(2)}$ ovšem působící na částici 2. Najděte 9 nejnižších energetických hladin určete jejich stupeň degenerace. Předpokládejte, že interakční konstanta $\lambda > 0$ je malá $4\lambda < \omega$. Porovnejte výsledky s případem, kdy by částice byly rozlišitelné, uvědomte si tak, že platnost symetrizačního postulátu je experimentálně ověřitelná.

Poznámky k řešení úlohy:

- Hamiltonián je správným operátorem pro nerozlišitelné částice, tj. komutuje s permutačním operátorem \hat{P}_{12} (ověřte). To znamená, že vlastní stavy lze hledat pro rozlišitelné částice a pak z nich vytřídit jen ty symetrické vůči záměně částic, jak vyžaduje symetrizační postulát pro bosony. Hamiltonián je navíc součtem příspěvků od první částice, druhé částice a spinu, což znamená, že můžeme vlnové funkce hledat v separeném tvaru $|n_1\rangle_1|n_2\rangle_2|\chi\rangle_s$.
- Vlastní stavy prostorové části jsou přímo součiny oscilátorových stavů $|n_1\rangle_1|n_2\rangle_2$ a příspěvek energie od této části je $\hbar\omega(n_1 + n_2 + 1)$.
- Vlastní stavy spinové části budou současně vlastními stavy celkového spinu $|\chi\rangle_s = |SM\rangle$ a příspěvek k energii je $\lambda\hbar\frac{1}{2}[S(S+1) - 4]$ přitom vlnová funkce pro $S = 0, 2$ je symetrická vůči záměně částic a pro $S = 1$ je antisymetrická (viz cvičení na skládání momentu hybnosti).

E/\hbar	n_1, n_2, S	vln.fce rozlišitelné	N_0, N_1, N_2	vln.fce bosony
$\omega - 2\lambda$	0,0,0	$ 0\rangle_1 0\rangle_2 00\rangle_s$ (1×)	2,0,0	$ 0\rangle_1 0\rangle_2 00\rangle_s$ (1×)
$\omega - \lambda$	0,0,1	$ 0\rangle_1 0\rangle_2 1M\rangle_s$ (3×)	2,0,0	(0×)
$\omega + \lambda$	0,0,2	$ 0\rangle_1 0\rangle_2 2M\rangle_s$ (5×)	2,0,0	$ 0\rangle_1 0\rangle_2 2M\rangle_s$ (5×)
$2\omega - 2\lambda$	1,0,0 0,1,0	$ 1\rangle_1 0\rangle_2 00\rangle_s$ $ 0\rangle_1 1\rangle_2 00\rangle_s$ (2×)	1,1,0	$\frac{1}{\sqrt{2}}(1\rangle_1 0\rangle_2 + 0\rangle_1 1\rangle_2) 00\rangle_s$ (1×)
$2\omega - \lambda$	1,0,1 0,1,1	$ 1\rangle_1 0\rangle_2 1M\rangle_s$ $ 0\rangle_1 1\rangle_2 1M\rangle_s$ (6×)	1,1,0	$\frac{1}{\sqrt{2}}(1\rangle_1 0\rangle_2 - 0\rangle_1 1\rangle_2) 1M\rangle_s$ (3×)
$2\omega + \lambda$	1,0,2 0,1,2	$ 1\rangle_1 0\rangle_2 2M\rangle_s$ $ 0\rangle_1 1\rangle_2 2M\rangle_s$ (10×)	1,1,0	$\frac{1}{\sqrt{2}}(1\rangle_1 0\rangle_2 + 0\rangle_1 1\rangle_2) 2M\rangle_s$ (5×)
$3\omega - 2\lambda$	2,0,0 0,2,0 1,1,0	$ 2\rangle_1 0\rangle_2 00\rangle_s$ $ 0\rangle_1 2\rangle_2 00\rangle_s$ $ 1\rangle_1 1\rangle_2 00\rangle_s$ (3×)	1,0,1 0,2,0	$\frac{1}{\sqrt{2}}(2\rangle_1 0\rangle_2 + 0\rangle_1 2\rangle_2) 00\rangle_s$ $ 1\rangle_1 1\rangle_2 00\rangle_s$ (2×)
$3\omega - \lambda$	2,0,1 0,2,1 1,1,1	$ 2\rangle_1 0\rangle_2 1M\rangle_s$ $ 0\rangle_1 2\rangle_2 1M\rangle_s$ $ 1\rangle_1 1\rangle_2 1M\rangle_s$ (9×)	1,0,1	$\frac{1}{\sqrt{2}}(2\rangle_1 0\rangle_2 - 0\rangle_1 2\rangle_2) 1M\rangle_s$ (3×)
$3\omega + \lambda$	2,0,2 0,2,2 1,1,2	$ 2\rangle_1 0\rangle_2 2M\rangle_s$ $ 0\rangle_1 2\rangle_2 2M\rangle_s$ $ 1\rangle_1 1\rangle_2 2M\rangle_s$ (15×)	1,0,1 0,2,0	$\frac{1}{\sqrt{2}}(2\rangle_1 0\rangle_2 + 0\rangle_1 2\rangle_2) 2M\rangle_s$ $ 1\rangle_1 1\rangle_2 2M\rangle_s$ (10×)

V tabulce jsou shrnuty výsledky jak pro případ rozlišitelných částic, tak pro případ nerozlišitelných bosonů.

Úloha 2: Částice na kroužku

Stavový prostor částice tvoří periodické, kvadraticky integrovatelné funkce na intervalu $\phi \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Předpokládejme, že hamiltonián tohoto systému je

$$H = -\frac{\hbar^2}{2\mu R^2} \frac{d^2}{d\phi^2}.$$

1. Najděte stacionární stavy částice a příslušné energie.
2. Nyní uvažujte dvě takové navzájem neinteragující částice a opět najděte vlastní stavy a energie v případě, že jsou to nerozlišitelné bosony.
3. Jako předchozí úloha, ale pro fermiony. V obou případech diskutujte první tři energetické hladiny a jejich degeneraci.
4. Ve stacionární poruchové teorii započítejte kontaktní interakci obou částic $U(\phi_1, \phi_2) = \lambda\delta(\phi_1 - \phi_2)$ a to jak v případě bosonů, tak pro fermiony.

Poznámka: Tento systém lze též interpretovat jako rotor s jedním stupněm volnosti, nebo částice v jámě kvantované pomocí periodické okrajové podmínky (Born-vonKarman). U částic neuvažujeme spinové stupně volnosti, můžeme si představit například, že jsou fixovány silným magnetickým polem.

Poznámky k řešení úlohy:

- V případě jediné částice snadno napíšeme rovnou vlnovou funkci stacionárního stavu $|m\rangle = \psi_m(\phi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\phi}$ s energií $\epsilon_m = \hbar^2 m^2 / 2\mu R^2 \equiv \epsilon_1 m^2$.
- Pro dvě částice vezmeme prostě součin jednočásticových funkcí $\psi_{m_1}(\phi_1)\psi_{m_2}(\phi_2)$ popřípadě jej symmetrizujeme pro bosony nebo antisymmetrizujeme pro fermiony. Energie pak je $E = \epsilon_{m_1} + \epsilon_{m_2} = \epsilon_1(m_1^2 + m_2^2)$. Výsledné vlnové funkce jsou přehledně shrnuty v následující tabulce.

Energie	Bosony	Fermiony	Porucha-Bosony
0	$ 0\rangle 0\rangle$		$\lambda/(2\pi)$
ϵ_1	$\frac{1}{\sqrt{2}}(0\rangle 1\rangle + 1\rangle 0\rangle)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(0\rangle 1\rangle - 1\rangle 0\rangle)$	$\begin{pmatrix} \lambda/\pi & 0 \\ 0 & \lambda/\pi \end{pmatrix}$
	$\frac{1}{\sqrt{2}}(0\rangle -1\rangle + -1\rangle 0\rangle)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(0\rangle -1\rangle - -1\rangle 0\rangle)$	
$2\epsilon_1$	$ 1\rangle 1\rangle$		$\begin{pmatrix} \lambda/2\pi & 0 & 0 \\ 0 & \lambda/2\pi & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda/2\pi \end{pmatrix}$
	$\frac{1}{\sqrt{2}}(1\rangle -1\rangle + -1\rangle 1\rangle)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(1\rangle -1\rangle - -1\rangle 1\rangle)$	
$4\epsilon_1$	<i>nehledáno</i>	$\frac{1}{\sqrt{2}}(0\rangle 2\rangle - 2\rangle 0\rangle)$ $\frac{1}{\sqrt{2}}(0\rangle -2\rangle - -2\rangle 0\rangle)$	<i>nehledáno</i>

V posledním sloupci je ukázán příspěvek prvního řádu poruchové teorie. V případě degenerovaných hladin je uvedena celá matice poruchy, i když matice poruchy je ve všech případech diagonální (rozmyslete, že je to důsledkem toho, že součet kvantových čísel $m_1 + m_2$ je zachovávaná se veličinou). Porucha je ukázána jen pro Bosonové vlnové funkce. Zkuste rozmyslet, že pro fermiony je porucha identicky 0 v důsledku Pauliho vylučovacího principu (obě částice nesmí mít stejné ϕ). Výpočet poruchy ukážeme alespoň na příkladu prvního stavu pro druhou hladinu:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\langle 0|\langle 1| + \langle 1|\langle 0|)U(|0\rangle|1\rangle + |1\rangle|0\rangle) &= \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^2} \int d\phi_1 \int d\phi_2 [e^{-i\phi_2} + e^{-i\phi_1}] \lambda \delta(\phi_1 - \phi_2) [e^{i\phi_2} + e^{i\phi_1}] \\ &= \frac{1}{2} \frac{\lambda}{(2\pi)^2} \int d\phi_1 2e^{-i\phi_1} 2e^{i\phi_1} = \frac{\lambda}{\pi}. \end{aligned}$$