Úloha 3: Schwingerův oscilátorový model momentu hybnosti

Termín odevzdání: 13. dubna

Uvažujme dvourozměrný harmonický oscilátor s Hamiltoniánem

$$\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + 1),$$

kde $\hat{a}_1^\dagger$ a $\hat{a}_2^\dagger$ jsou kreační operátory ve směru os x_1 a x_2 splňující standardní komutační relace

$$[\hat{a}_i, \hat{a}_j^\dagger] = \delta_{ij}\hat{I}, \quad [\hat{a}_i, \hat{a}_j] = [\hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_j^\dagger] = 0.$$

1. Dokaže, že operátory

   $$\hat{J}_x = \tfrac{\hbar}{2}(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 + \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1), \quad \hat{J}_y = \tfrac{\hbar}{2i}(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2 - \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1), \quad \hat{J}_z = \tfrac{\hbar}{2}(\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 - \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2)$$

   jsou samosdružené operátory (1bod), a že splňují komutační relace momentu hybnosti

   $$[\hat{J}_x, \hat{J}_y] = i\hbar\hat{J}_z, \quad [\hat{J}_y, \hat{J}_z] = i\hbar\hat{J}_x, \quad [\hat{J}_z, \hat{J}_x] = i\hbar\hat{J}_y$$

   (4 body).

2. Najděte operátory $\hat{J}^2$ a $\hat{J}_z$ jako funkce operátorů $\hat{N}_i = \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i$ (2b).

3. Nechť $|n_1, n_2\rangle$ jsou stacionární stavy tohoto oscilátoru (se standardní fázovou konvencí), tj.

   $$\hat{N}_i|n_1, n_2\rangle = n_i|n_1, n_2\rangle, \quad \hat{a}_1^\dagger|n_1, n_2\rangle = \sqrt{n_1 + 1}|n_1 + 1, n_2\rangle, \text{atd.}$$

   Najděte společné vlastní stavy $\hat{J}^2$ a $\hat{J}_z$ v bázi $|n_1, n_2\rangle$ (2 body) a dále najděte spektrum hodnot jichž může nabývat kvantové číslo j a stupeň jejich degenerace (1bod).

Pokračuje na další straně ...

Úloha 4: Schwingerův oscilátorový model - pokračování

Termín odevzdání: 20. dubna

1. Uvažujte "rotaci" systému popsanou operátorem

$$\hat{\mathcal{R}}(\alpha,\beta,\gamma) = \exp(-\tfrac{i}{\hbar}\alpha \hat{J}_z)\exp(-\tfrac{i}{\hbar}\beta \hat{J}_y)\exp(-\tfrac{i}{\hbar}\gamma \hat{J}_z).$$

   Dokažte, že potom platí $\hat{\mathcal{R}}(\alpha,\beta\gamma)|0,0\rangle = |0,0\rangle$ (1 bod).

2. Pomocí Bakerova-Campbellova-Hausdorffova vzorce

$$e^{i\alpha\hat{G}}\hat{A}e^{-i\alpha\hat{G}} = \exp\{i\alpha[\hat{G},\boldsymbol{.}]\}\hat{A} \equiv \hat{A} + i\alpha[\hat{G},\hat{A}] + \frac{1}{2!}(i\alpha)^2[\hat{G},[\hat{G},\hat{A}]] + \dots$$

   zjistěte jak se transformují operátory $\hat{a}_i^\dagger \to \hat{\mathcal{R}}^\dagger \hat{a}_i^\dagger \hat{\mathcal{R}}$ (4 body).

3. Ukažte, že operátory $\hat{T}_+^{1/2} \equiv \hat{a}_1^\dagger$ a $\hat{T}_-^{1/2} \equiv \hat{a}_2^\dagger$ představují ireducibilní složky tenzorového operátoru řádu 1/2 (pozn.: nehermitovský operátor, tj. nepředstavuje pozorovatelnou veličinu). (2body)

4. Porovnáním Wignerovy-Eckartovy věty

$$\langle j_1, m_1|\hat{T}_m^j|j_2, m_2\rangle = \langle j m j_2 m_2|j_1 m_1\rangle \frac{(j_1||T^j||j_2)}{\sqrt{2j_1+1}}$$

   s přímým výpočtem maticových elementů $\langle j_1, m_1|\hat{T}_m^j|j_2, m_2\rangle$ v oscilátorové bázi určete Clebschovy-Gordanovy koeficienty pro $j_1 = 3/2$ a $j_2 = 1$ a najděte redukovaný maticový element $(3/2||T^{1/2}||1)$. (3body).