

Zápočtová písemka z kvantové mechaniky II

čas na řešení: 90min

Úloha 1(10 bodů)

Uvažujme dvě (rozdílitelné) částice na kroužku popsané hamiltoniánem

$$\hat{H} = -\frac{1}{2} \left[\frac{d^2}{d\varphi_1^2} + \frac{d^2}{d\varphi_2^2} \right] + \lambda \cos(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Pomocí variačního principu najděte nejlepší odhad energie základního stavu. Testovací funkce berte ve tvaru $\psi(\varphi_1, \varphi_2) = \alpha + \beta \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$, kde α, β jsou variační parametry. Pro finální výsledek volte $\lambda = 1/\sqrt{2}$.

Úloha 2(10 bodů)

Vyjádřete všechny maticové elementy složek operátoru hybnosti $\langle nlm | \hat{p}_i | n'l'm' \rangle$ mezi stacionárními stavy $|nlm\rangle$ atomu vodíku pro $n = 2$, pokud víte, že $\langle 210 | \hat{p}_z | 200 \rangle = C$.

Úloha 3(10 bodů)

Protónium je vázaným stavem protonu a antiprotonu. Když nebudeme uvažovat možnost anihilace a započteme jen Coulombickou interakci jde vlastně o vodíku-podobný atom. Označme celkový moment hybnosti $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}^{(1)} + \vec{S}^{(2)}$, kde \vec{L} je orbitální moment hybnosti a $\vec{S}^{(1)}$ a $\vec{S}^{(2)}$ jsou spinové momenty protonu a antiprotonu (částice se spinem $1/2$). Uvažujte první dvě energetické hladiny a najděte mezi stavy těchto dvou hladin stav $|\psi\rangle$ s největším celkovým momentem hybnosti \vec{J}^2 a nulovou projekcí \hat{J}_z na osu z . Jaká je pravděpodobnost naměřit ve stavu $|\psi\rangle$ nulovou projekci orbitálního momentu hybnosti \vec{L} na osu z .

Úloha 4(10 bodů)

Částice v kvantové trojtečce má hamiltonián

$$\hat{H} = -\beta(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 3| + |3\rangle\langle 1|) + h.c.,$$

kde $\beta > 0$ jen konstanta. Uvažujte takovou trojtečku zaplněnou třemi navzájem neinteragujícími nerozlišitelnými fermiony se spinem $1/2$. Jaký je rozdíl energií stavu s nejnižší a nejvyšší energií?

Úloha 5(10 bodů)

V systému z předchozí úlohy definujeme kreační operátor \hat{c}_{ns}^\dagger , který kreira částici v tečce $|n\rangle$ se spinem $|s\rangle$, kde $n = 1, 2, 3$ značí tečku a $s = \pm$ značí spin $\pm\hbar/2$. Najděte vyjádření operátoru \hat{H} ve druhém kvantování (5 bodů). Najděte ve druhém kvantování vyjádření operátoru kvadrátu celkového spinu všech částic v tečce (5 bodů).